

DĚJINY MATEMATIKY

Doporučená literatura:

1. D.J . Struik: *Dějiny matematiky*
2. A. Kolman: *Dějiny matematiky ve starověku*
3. Š. Známa a kol.: *Pohledy do dějin matematiky*
4. Sborníky z edice „dějiny matematiky“ vydávané nakladatelstvím PROMETHEUS. (Články J. Bečváře „Hrdinský věk řecké matematiky“ ve sbornících *Historie matematiky I, II* apod.)
5. Van der Waerden, B.: *Erwachende Wissenschaft*, (dostupnější je asi ruský překlad *Probuždající se nauka*, nebo překlad anglický).
6. P. Bero: *Matematici, ja a Ty* (knížka psaná pro talentované žáky ZŠ, obsahuje zjednodušené, ale výstižné ukázky některých matem. postupů).
7. A. Rényi: *Dialogy o matematice*
8. J. Mrázek: *Taje matematiky*
9. D. Guedj: *Papouškův teorém*

POČÁTKY MATEMATIKY

-15 000	-10 000	-5 000	-3 000	-1 000	0	2000
I	I	I	I	I	I	I
Paleolit	Mezolit	Neolit	Měď, Eneolit	Bronz	Fe	

Paleolit: Jeskyní malby (Francie, Španělsko - znázorňování prostoru na plochu jako počátky geometrických představ).

Vrubovky - první numerace (Byly nalezeny v různých částech světa, věstonická je považována za nejstarší). Charakteristické znaky pravěké numerace:

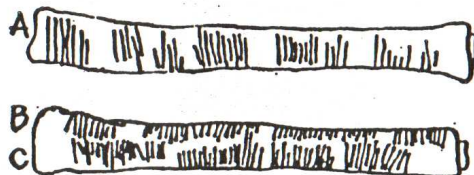
1. Užíval se jeden číselný znak, který značil číslo jedna - čárka nebo zářez.
2. Opakováním znaku se dalo zapsat číslo větší než jedna (dvě čárky znamenaly číslo 2, tři čárky číslo 3 atd.).
3. Při větších číslech se čárky sdružovaly do skupin (většinou po pěti), aby byl zápis přehlednější.

VRUBOVKY

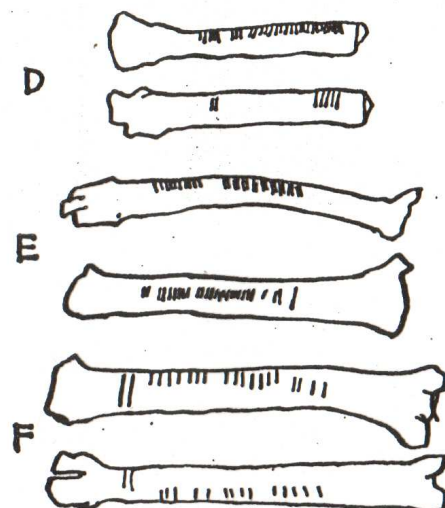
OBR. 1



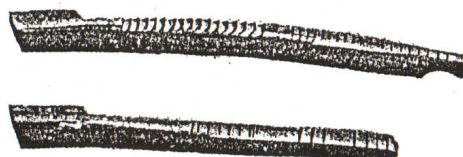
OBR. 2



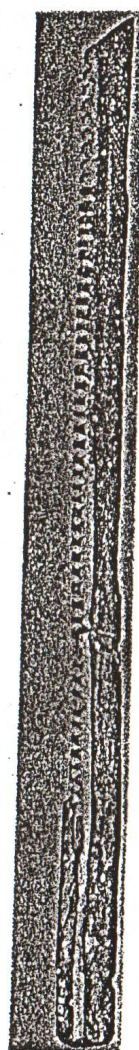
OBR. 3



OBR. 4



OBR. 5

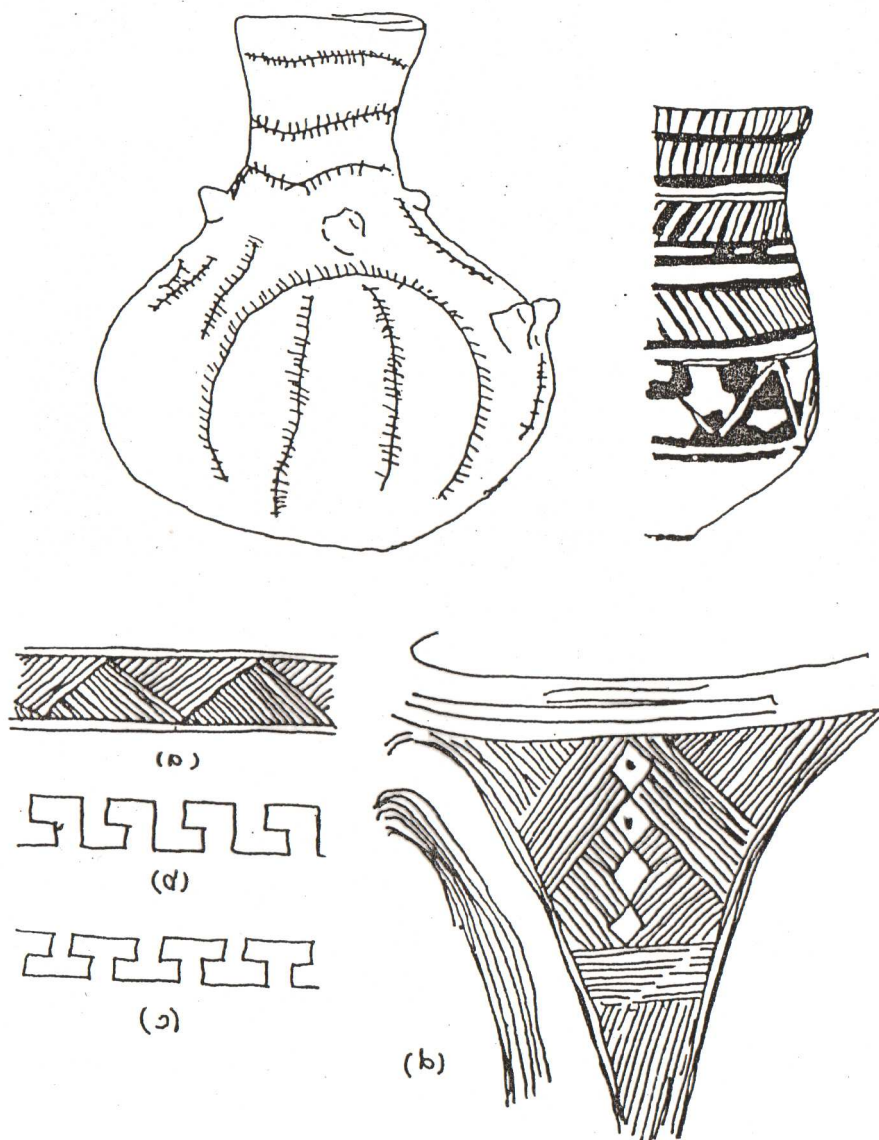


Na obr. 1 je tzv. věstonická vrubovka, kost mladého vlka dlouhá 18 cm, opatřená 55 zářezy. Objevitel prof. Absolon odhadl její stáří na 10 až 30.000 let.

Obdobné vrubové záznamy byly nalezeny i jinde. Na obr. 2 je kresba vrubovky ze Zaire, stará 6.500 až 9.000 let.

Na obr. 3 jsou vrubovky z Advejeva (Rusko). Na obr. 4 jsou vrubovky anglické finanční správy ze 13. stol., na obr. 5 vrubovka z roku 1627 z olomouckého muzea.

Neolit – sídliště, zemědělství, řemesla, obchod (rozvoj řeči, rozvoj číselných představ),
vyměřování pozemků, stavitelství, umění – geometrie.



Váza z Mezopotámie (5. tis. před n.l.); váza z Bavorska (3. tis. př. n.l.) zdobená vpichy. (d) Ukázka výzdoby nádoby z Domice (4. tis. př. n.l.), (a) pásový otiv z lužické kultury (2. tis. př. n.l.), (b) meandry v halštatské keramice, (c) meandry v laténské keramice.

EGYPT

- nejstarší záznam 3 300 př.nl. – vyčíslení vojenské kořisti
- Papyrussy
Moskevský (1 890 př. nl.) 25 úloh
Rhindův (uložen v Lodýně) 1 700 př.nl. 84 úloh – byly v něm nalezeny chyby

Tyto dva papyry jsou hlavním zdrojem informací o matematice ve starověkém Egyptě. Kromě nich se dochovaly matematické tabulky zapsané na kůži a různé číselné zápisy. Jinak téměř nic dalšího.

Numerace ve starověkém Egyptě

Podobně jako v pravěku se znaky opět sdružovaly do skupin, skupinu deseti čárek však nahradili novým znakem, který označoval číslo deset. Měli speciální znaky i pro další mocniny deseti.

Číslo	Egyptské číselné znaky	Pravděpodobný význam znaku
1		
10		kost
100		svitek nebo stočený provaz
1 000		lotosový květ
10 000		prst
100 000		pulec
1 000 000		žasnoucí muž

Zápisy čísel

Náš zápis	Egyptský zápis
7	
24	⌒ ⌒
45	⌒ ⌒ ⌒ ⌒
326	⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒
1672	⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒ ⌒

- těžkopádná aritmetika, neznali poziční systém

Násobení 12 x 13:

12	13
12	1*
24	2
48	4*
96	8*
156	

Dělení 1 120 : 80

Sčítej počínaje od 80 dokud nedostaneš 1 120

80	1
800	10*
160	2
320	4*
1 120	14

- zlomky

$\frac{1}{2}\dots\bar{2}$, $\frac{1}{3}\dots\bar{3}$ atd. Přímou zapisovali pouze pro tzv. kmenové zlomky, tj.

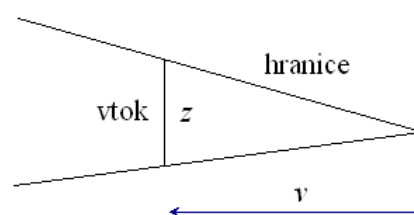
zlomky typu $\frac{1}{n}$, jedinou výjimkou bylo číslo $\frac{2}{3}\dots\bar{3}$

Dochovaly se tabulky vyjadřující čísla $2/n$ jako součty kmenových zlomků,
např. $2/5 = 1/3 + 1/15$, $2/7 = 1/4 + 1/28$

GEOMETRIE

o obrazce: trojúhelník = pole

$$S = \frac{z \cdot v}{2}$$

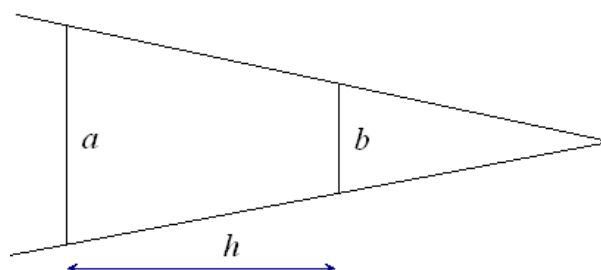


o čtyřhrané pole – pravoúhelník

$$S = a \cdot b$$

o lichoběžník

$$S = \frac{a+b}{2}h$$



o kruhové pole - kruh

$$S = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 \quad \text{Pozn. } \frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \Rightarrow \pi = 4 \frac{64}{81} \doteq 3,16$$

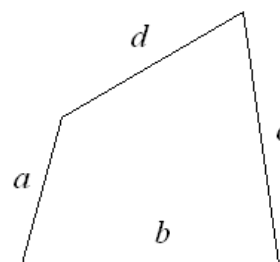
Úloha 17, MP: Výměra kruhového pole

Jak poznáš výměru pole? Zjistíš jeho $\bar{9}$, to je 1. Zbytek je 8. Vypočítej 8 krát 8. Bude to 64. Vypočteno, jak má být.

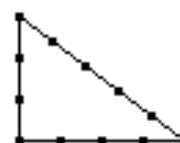
o Obecný čtyřúhelník

- přibližný vztah

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$



Vyměřování pravého úhlu: Napínači provazů údajně konstruovali pravý úhel provazcem s 13 stejně vzdálenými uzly

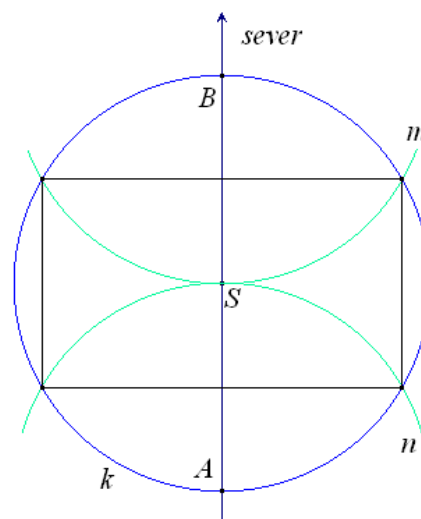


Jak mohli dosahovat velké přesnosti při vyměřování pravých úhlů pyramid?

Hypotéza (španělský archeolog Lopez Ferreiro, 1890):

Využívali konstrukci pravidelného šestiúhelníka.

Na nápisech i obrazech chrámů v Denděře, Edfu i jinde se uvádí, jak faraon v s bohyní Sefech-abui napíná provazec. Odtud lze vykonstruovat následující postup.



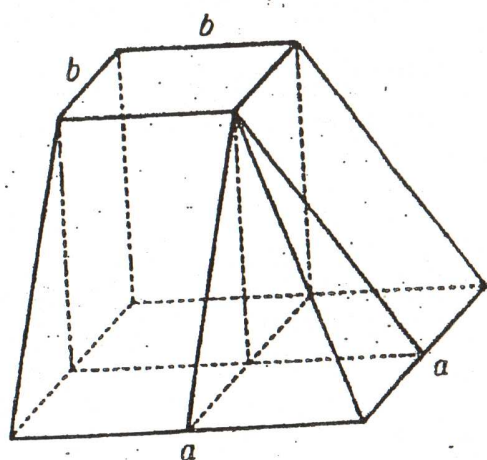
V noci určili podle hvězd sever a na předem upravené rovině sestrojili pomocí provazce a kolíků kružnici k s průměrem AB (velikosti řádově 100 m) severojižního směru (obr.). Dále pak kruhové oblouky m, n téhož poloměru, jako kružnice k , se středy v bodech B, A . Oblouky protnuly kružnici ve vrcholech obdélníka. K vytyčování používali speciální provazec o průměru kolem 1 cm, upletený přibližně ze sta vláken stmelených pryskyřicí. Zbytky takových provazců byly nalezeny. Při napnutí se provazce neprotahovaly a umožňovaly přesné konstrukce.

o Znali přesný vzorec pro objem komolého jehlanu se čtvercovými podstavami:

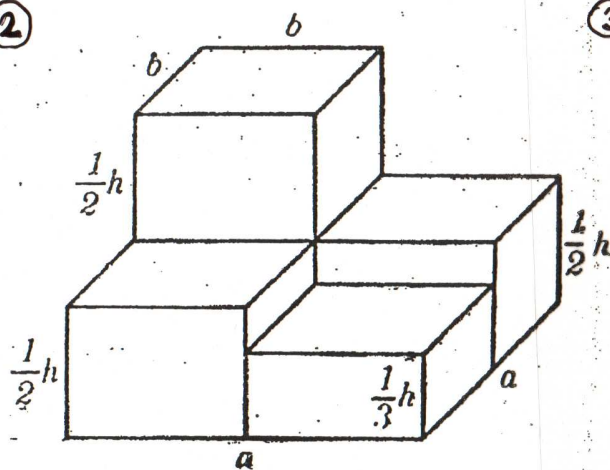
$$S = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2), \quad h \text{ je výška, } a, b \text{ délky stran podstav}$$

Zjistili to pravděpodobně rozkladem na jednodušší tělesa. Existuje několik hypotéz, jak to mohli udělat. Na obrázcích je jedna z nich:

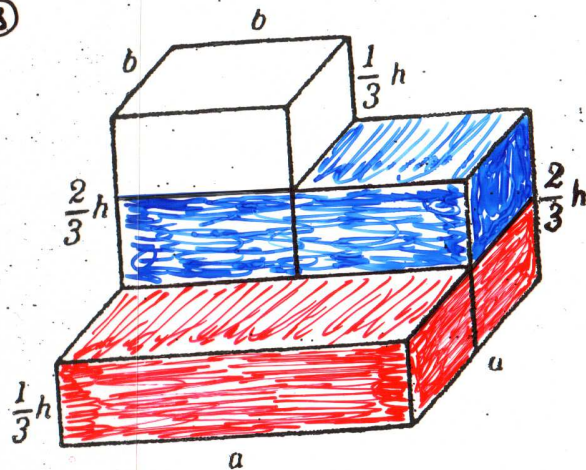
①



②

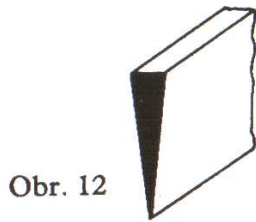


③



MEZOPOTÁMIE

Již v třetím tisíciletí před naším letopočtem dělali Sumerové v jižní Mezopotámii zápisy otiskováním trojhranné dřevěné tyčinky na hliněné tabulky.



Obr. 12

Značka **!** vytisknutá do měkkého jílu takto seříznutou tyčinkou znamenala číslo jedna. Opakováním dostali postupně čísla 2, 3 až 9. Pro číslo deset zavedli nový číselný znak, který se dal jednoduše vytvářet stejnou tyčinkou: **<**.

Po Sumerech převzali tento způsob zapisování čísel Babyloňané, kteří ovládli asi kolem 1800 př. n. l. celou Mezopotámii. Po nich se nazývá tento způsob zapisování čísel babylonský.

Opakováním těchto dvou znaků zapisovali čísla od 1 do 59. Např. zápis

<<!!!

znamená číslo 23. Na prvním místě odprava se zapisovaly jednotky, nalevo od nich desítky. Zápisy jiných čísel ukazuje tabulka.

6	12	38	45
!!! !!!	<!!	<<<!!!! !!!!	<<<<!! !!!

Při zapisování větších čísel než 59 užívali Babyloňané soustavy se základem 60. Šedesát jednotek tvořilo jednotku vyšší skupiny, šedesátku, 60 šedesátek tvořilo další skupinu, $60 \times$ šedesátku (tj. 3600) atd. K označování těchto vyšších skupin užívali stejných symbolů jako pro označování čísel od 1 do 59. Číselný znak znamenal jednotky, šedesátky nebo $60 \times$ šedesátky podle toho, kde byl umístěn.

Tento způsob zápisu si ukážeme na několika příkladech.

60×60	šedesátky	jednotky	značí
	!	<<	$1 \cdot 60 + 23 = 83$
	<		$11 \cdot 60 + 2 = 662$
	<<	<	$2 \cdot 60 \cdot 60 + 22 \cdot 60 + 11 = 8531$
!		<<	$1 \cdot 60 \cdot 60 + 23 = 3623$

1. období

Nejstarší matematické texty z doby sumerské renesance (poslední sumerské období ~2100 př. nl.)

Značná početní zběhlost – multiplikační tabulky. Původní desítkový systém zápisu čísel byl doplněn dobře připravovaným šedesátkovým, jak jsme již uvedli. Používali poziční systém.

Číslo z prvního řádku poslední tabulky budeme zapisovat takto:

$$(5, 23) = 5 \times 60 + 23 = 323$$

Příklad jiného čísla: $(5, 2, 1) = 5 \times 60^2 + 2 \times 60 + 1 = 18\,121$

První cifra v závorce značí počet skupin po 3600 prvcích, druhá byl počet „šedesátek“, třetí počet jednotek. (V originálních zápisech jsou místo čárek udělány velké mezery a místo dnešních cifer jsou používány výše uvedené dva znaky.) Zápis nebyl jednoznačný, protože nemuselo být jasné, od jakého řádu máme vycházet. Zápis posledního čísla bylo možno například chápat i takto:

$$(5, 2, 1) = 5 \times 60 + 2 \times 1 + 1 \times 1/60 = 3021/60$$

Poziční systém, šedesátková soustava → trvalý majetek lidstva neznali nulu
Dělení hodiny na šedesát minut a minuty na 60 vteřin, stejně jako dělení kružnice na 360° pochází od Sumerů. Poziční systém usnadňuje násobení a dělení (jednoduché algoritmy).

Pozn. Zkuste vydělit $3451 : 29$ a MMMCDLI : XXIX

Pozn. Římské číslice I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

2. období

Od 19. stol př.n.l. ovládli území Semité, kolem roku 1800 př.n.l. Velká říše, které vládl Chamurappi (Akkadové, Asyřané, Babyloňané). Rozvinutá algebra. Uměli řešit rovnice lineární, kvadratické a bikvadratické, kubické (přibližná řešení), soustavy lineárních rovnic i kvadratických rovnic.

Zápis řešení se omezuje na slovní popis postupu. Geometrie se rozvíjí z praktických měřičských problémů má algebraický charakter. Byly známy postupy výpočtu obsahů jednoduchých plošných útvarů a objemu hranolů a válců.

Kruh přibližně: $S = 3r^2$, $o = 6r$, znali přesné vzorce pro trojúhelník a lichoběžník. Nevíme, zda určili i objem kužele a jehlanu.

Objem komolého kužele přibližně: $V = \frac{1}{2} (P_1 + P_2)h$.

Objem komolého jehlanu se čtvercovými podstavami: $V = \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] h$ nebo

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{a-b}{4} \right] h \quad (\text{originální zápis má obě možné interpretace})$$

Znali pytagorejské trojice čísel

3. období

Doba novobabylonská, perská, selekuovská 600-300 př.n.l.

Matematika byla ovlivněna silným rozvojem astronomie, znali též složené úrokování (například na jak dlouho se vložená částka částka zdvojnásobí při 20% úroku)

Počátky používání nuly v zápisech čísel.

Příklady některých babylonských postupů (z 1. a 2. období)

1. Příklad původního textu:

DÉLKA, ŠÍŘKA

Délku a šířku jsem vynásobil a dostal plochu.

Přebytek délky nad šířkou jsem přidal k ploše. Obdržel jsem 183.

Pak jsem sečetl délku a šířku: 27

Má se určit délka, šířka a plocha. Součty 27 a 183

Výsledek: 15 délka, 12 šířka, 180 plocha.

Obdržíš takto: $27 + 183 = 210$

$$27 + 2 = 29$$

Vezmi polovinu z 29, tj. 14,5

$$14,5 \cdot 14,5 = 210,25$$

$$210,25 - 210 = 0,25$$

Odmocnina z 0,25 je 0,5

$$14,5 + 0,5 = 15 \dots \text{délka}$$

$$14,5 - 0,5 = 14, \text{ odebereme 2, které jsme přidali}$$

a dostaneme skutečnou šířku ...12

$$15 \cdot 12 = 180 \dots \text{plocha}$$

15 délku a 12 šířku vynásobíme: $15 - 12 = 3$

$$180 + 3 = 183.$$

V dnešním, algebraickém přepisu by řešení vypadalo takto:

Máme najít délku x , šířku y a obsah $S = xy$, je-li $xy + x - y = 183$
 $x + y = 27$

Rovnice sečteme:

$$xy + 2x = 210$$

a provedeme substituci $z = y + 2$, pak totiž $xy + 2x = xz$.

Dostaneme soustavu $x + z = 29$ a $xz = 210$.

Položíme $x = \frac{29}{2} + d$ a $z = \frac{29}{2} - d$, dosadíme do druhé rovnice: $\left(\frac{29}{2}\right)^2 - d^2 = 210$,

$$\text{odtud } d^2 = \left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210 \Rightarrow d = \sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210} = 0,5.$$

$$x = 14,5 + 0,5 = 15, z = 14,5 - 0,5 = 14 \quad \text{a} \quad y = 14 - 2 = 12, S = xy = 180.$$

2. Komentář. Babyloňané často převáděli úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici na úlohu: najděte dvě čísla x a y , je-li dán jejich součet p a součin q

Babylonský postup
(přepsáno do dnešní symboliky)

$$x + y = p$$

$$xy = q$$

$$x = \frac{p}{2} - d$$

$$y = \frac{p}{2} + d$$

$$\left(\frac{p}{2} - d\right)\left(\frac{p}{2} + d\right) = q$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - d^2 = q$$

$$d^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$y = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Dnešní standartní postup
(např. studenta (střední školy))

$$y = p - x$$

$$x(p - x) = q$$

$$x^2 - px + q = 0$$

$$D = (-p)^2 - 4q$$

$$x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$x_1 = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = y_1 \wedge y_2 = x_1$$

3. Příklad řešení kubické rovnice: $x^2(12x+1)=1,75$

Babylonský matematik vynásobil obě strany rovnice číslem 12^2 , dostal

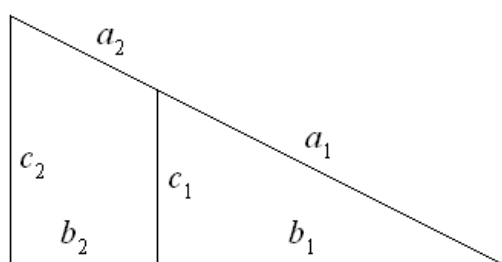
$(12x)^2(12x+1)=252$, a napsal hned výsledek $12x=6$, tedy $x=0,5$. Použil totiž tabulku

$n \rightarrow n^2(n+1)$.

$$b_1 \cdot b_2 = A$$

4. Najděte a rozdělte pravoúhlý trojúhelník podle obrázku tak aby platilo $S_1 \cdot S_2 = B$

$$a_1 = C$$

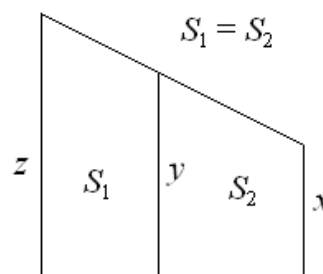


Kde A, B, C jsou předem daná čísla. Úloha svědčí o rozvinutém abstraktním algebraickém myšlení a o rozvíjení matematiky jako vědy (nejen z praktických potřeb, ale pro sebe samu).

5. Určení délky z příčky rovnoběžné s rameny pravoúhlého lichoběžníku o základnách délek x, y za podmínky, že příčka dělí lichoběžník na dva útvary stejného obsahu.

Je uvedena tabulka čísel

x	y	z
1	5	7
7	13	17
17	25	31
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Tím je definována posloupnost

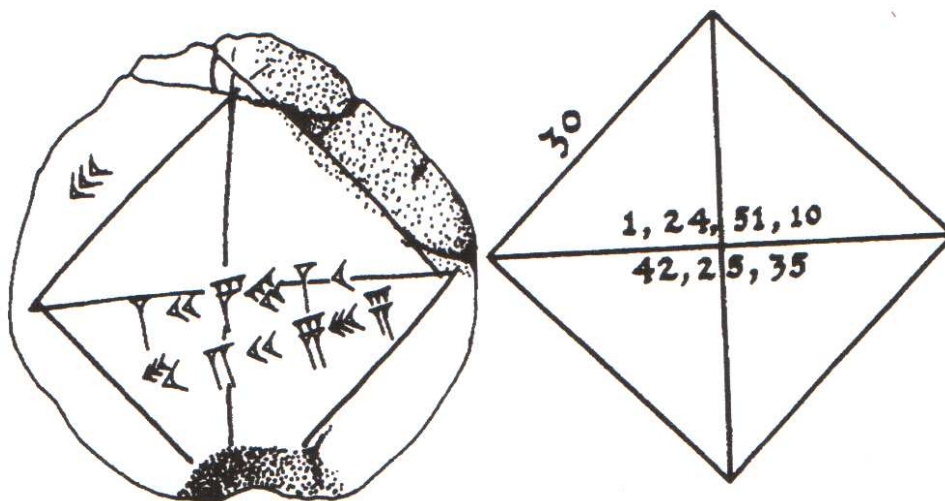
$$\{ [x, y, z], x = 2n^2 - 1, y = n^2 + (n+1)^2, z = 2(n+1)^2 - 1, n \in \mathbb{N} \}$$

6. Úhlopříčka čtverce

Na destičce uvedena strana čtverce a číslo kterým nutno násobit, abychom dostali uhlopříčku:

$$\sqrt{2} = (1;24;51;10) = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421296....$$

dnes uváděná hodnota $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$



7. Znalosti vztahů

- 1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- 2) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- 3) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^n + (2^n - 1)$
- 4) $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right)(1 + 2 + 3 + \dots + n)$
- 5) Pythagorejské trojice: $x = p^2 - q^2, y = 2pq, z = p^2 + q^2$

STAROVĚKÉ ŘECKO



MÍSTA VÝZNAMNÁ PRO VÝVOJ MATEMATIKY VE STAROVĚKU

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1. Řím: <i>Agrimensoři, Vitruvius</i> | 6. Athény: <i>Platón, Ptolemaios</i> | 12. Nicaia: <i>Hipparchos</i> |
| 2. Syrakusy: <i>Archimédes</i> | 7. Stageira: <i>Aristoteles</i> | 13. Perge: <i>Apollónios</i> |
| 3. Elea: <i>Zenon</i> | 8. Chios: <i>Hippokrates</i> | 14. Alexandrie: <i>Euklides, Eratosthénes, Apollónios, Heron, Ptolemaios, Diofantos, Pappos</i> |
| 4. Tarent: <i>Pythagoras</i> | 9. Samos: <i>Pythagoras</i> | 15. Kroton: <i>Pythagoras</i> |
| 5. Kyrene: <i>Eratosthénes</i> | 10. Knidos: <i>Eudoxos</i> | |
| | 11. Milet: <i>Thales</i> | |

Kolem roku 1000 př.n.l. bouřlivé období v oblasti kolem středoziemního moře, stěhování národů, války. Dobu bronzovou vystřídala doba železná. Kolem r. 900 př.n.l. zmizela Minoova říše a říše Chetitů, Egypt a Babylon ztratily na významu, objevily se nové národy: Židé, Asyřané, Řekové, Fénicičané

Železo: převzat ve válečnictví, zlevnění a zkvalitnění výrobních nástrojů

Růst společenského bohatství - více lidí se podílelo na veřejných a hospodářských záležitostech. Ekonomický a kulturní rozvoj: zavedení ražených peněz , objev abecedy.

Města která vyrostla na pobřeží Malé Asie a Řecka měla nový charakter: byla to obchodní města, v níž starověcí latifundisté (vlastníci půdy) bojovali s nezávislou a politicky uvědomělou třídou obchodníků.

7-6 st. př.n.l.: Kupecká třída dosáhla nadvlády a musela naopak obstát ve vnitřních bojích s malými obchodníky a řemeslníky vytvářejícími lid (démos).

Výsledek: vznik samosprávných městských států (polis):

v Řecku – Milét, Korint, Athény,

v Itálii - Kroton, Tarentum,

na Sicílii - Syrakusy.

Kupec: Nezávislý člověk, který věděl, že jeho nezávislost je výsledkem urputného a tvrdého boje.

- žil v době velkých geografických objevů
- neuznával absolutního vládce, ani absolutní boží moc
- měl dost volného času, který mu zajistilo jeho bohatství a práce otroků
- „vydělával hlavou“ a filosofoval o svém světě, dřívější mysticismus nahradil racionalismem, tradiční otázku „Jak?“ vystřídalo „Proč?“. Snaha o vědecký výklad světa.

JÓNIE: Milét, Efesos

Míšení kultury a vědomostí z Egypta, Řecka a Babylonu. První filosofové se částečně osvobodili od náboženství. Jónská přírodní filosofie: náboženství bylo nahrazeno kosmologickým výkladem vzniku světa, který se u všech filosofů opíral o pralátku a hybný princip.

Nejstarší známý filosof Thales z Milétu (625? – 545? př.n.l.), zakladatel tzv. Milétské školy

Pokračovatelé: Anaximandros, Anaximédes

Thales byl snad fénického původu, byl

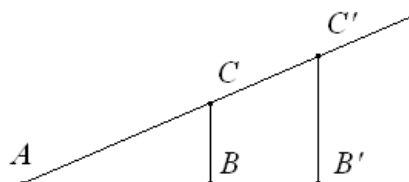
- zdatný obchodník (od pěstitelů oliv skoupil všechny lisy v Milétu a pak v době velké úrody oliv zbohatnul na jejich pronajímání).
- politik, usiloval o spojení jónských osad
- filosof - dílo „PERI FYSEÓS“ základní pralátka: voda, neboť se vyskytuje ve všech skupenstvích a neobejde se bez ní život. Hybný princip: zhušťování a zředování
- skvělý astronom navštívil Babylon a seznámil se s mnoha poznatky.

Předpověděl zatmění r. 585 př.n.l.

- matematické znalosti snad ovlivněny Egyptem

Ovládal podobnost. Při označení podle obrázku, kde je

$$B'C' \parallel BC, \text{ platí } \frac{|AB'|}{|AB|} = \frac{|BC'|}{|BC|}.$$



Toto tvrzení bývá někdy také označováno jako Thaletova věta.

Říká se, že na základě této věty určoval vzdálenosti lodí na moři: Necht' oko v bodě A, vzdálenost AB představuje délku natažené ruky, v místě B' se na moři nachází loď a v místě C' je vrchol jejího stěžně a úsečka BC představuje tyčku, kterou držíme v zákrytu se stěžněm. Jestliže Thales věděl, jak vysoké se dělají stěžně, pak tuto výšku dosadil za délku úsečky B'C', délky BC a AB změřil a určil vzdálenost loď jako $x = |AB'| = |BC'| \cdot |AB| / |BC|$.

Určoval výšku pyramid z podobnosti trojúhelníků: V době, kdy byla délka stínu svislé tyče rovna její výšce, změřil délku stínu pyramidy a usoudil, že tato délka je též rovna výšce pyramidy.

Užíval kružítko a úhloměr. **Další matematické věty:**

- průměr dělí kruh na dvě poloviny
- úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné
- vrcholové úhly jsou shodné
- všechny obvodové úhly nad průměrem jsou pravé (tzv. Thaletova věta)

Pythagoras (570? – 500?) Pocházel z ostrova Sámos (leží nedaleko Milétu i Efesu). Politik, myslitel, filosof, matematik. Později se přesídlil do Krotónu v jižní Itálii, kde založil filosof školu, která měla zároveň charakter náboženské sekty a politické strany. Pythagorejci prosazovali studium **kvadrivia** - čtyř základních věd, které rozvíjeli: Geometrie, aritmetiky, astronomie a hudby.

Pozn.: Boethius (480 – 525 - poslední Říman a první scholastik) sepsal pro křesťanský svět učebnice pro výuku kvadrivia.

Mystika čísel: „věci jsou čísla“

Číslo 1 ... základní stavební kámen aritmetiky, vyjímecné postavení není to obyčejné číslo, ale pochází přímo od Boha jako základ všech dalších čísel.

Sudá čísla ... ženská, lichá ... mužská, 5... manželství (součet prvního mužského a prvního ženského čísla), 4 ... spravedlnost, neboť $4 = 2 + 2 = 2 \cdot 2$.

$10 = 1+2+3+4$... jsoucno a dokonalost

Hudba: vyslovili zákon úměrnosti výšky tónu na délce struny (při stejném napětí) nebo na výšce vzduchového sloupce.

Zákony harmonie – tóny které k sobě ladí vznikají tehdy, jsou-li délky stran v poměru malých celých čísel.

Oktáva 1:2, kvinta 2:3, kvarta 3:4

Vztah mezi oktávou, kvintou a kvartou: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} : \frac{2}{3}$

Hudební úměra byla čtveřice (12, 9, 8, 6), která v sobě skrývala mnoho vztahů. 6:12 určuje oktávu, 8:12, určuje kvintu, 9:12 určuje kvartu, číslo 9 je aritmetický průměr z 6 a 12, číslo 8 je pak harmonický aritmetický průměr z 6 a 12:

$$9 = \frac{6+12}{2} \quad \text{a} \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \quad \left(\text{tj. } 8 = 2 \frac{6 \cdot 12}{6+12} \right)$$

Krychle má 12 hran, 9 rovin symetrie, 8 vrcholů a 6 stěn.

Kosmologie. Ve středu vesmíru je oheň. Kolem něj 10 sfér - na jedné jsou hvězdy, na dalších pěti po jedné z pěti známých planet, na dalších čtyřech pak Slunce, Měsíc, Země a Protizemě. Sféry se otočí rovnoměrným pohybem a pohyb způsobuje dokonale krásnou

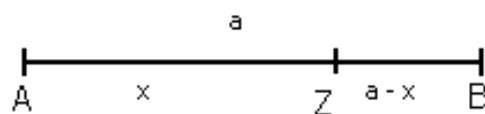
hudbu, kterou ale nelze slyšet, vnímat ji lze jen čistým rozumem „Harmonie kosmu a hudba sfér“

Geometrie. Pythagorova věta (byla v Mezopotámii a Egyptě známa dávno před Pythagorem - Pythagoras ji však prý jako první dokázal).

Zlatý řez. Pravděpodobně z Babylónie pocházejí znalosti Pythagorejců o průměrech, které snad Pythagoras aplikoval na hudební teorii. Jsou-li a, b kladná čísla, pak harmonický

průměr $H = \frac{2ab}{a+b}$, aritmetický průměr $A = \frac{a+b}{2}$ a geometrický průměr $G = \sqrt{ab}$.

Zlatý řez byl pak pro pythagorejce středem dalších spekulací s čísly. Zlatý řez je rozdělení úsečky v takovém poměru, aby její delší úsek byl geometrickým průměrem z délky celé úsečky a délky kratšího úseku. Častěji se uvádí, že poměr délek celé úsečky a delší části je stejná jako poměr délky delší části a délky kratší části.



Při označení podle obrázku tedy platí $a : x = x : (a - x)$, respektive $x = \sqrt{a(a - x)}$.

Název „zlatý řez“ Řekové neužívali, pochází z daleko pozdější doby. Poměru zlatého řezu připisovali pythagorejci mystický význam. Často se vyskytuje v přírodě, a je významný i z estetického hlediska (renesanční umělci hovořili o „božské proporci“).

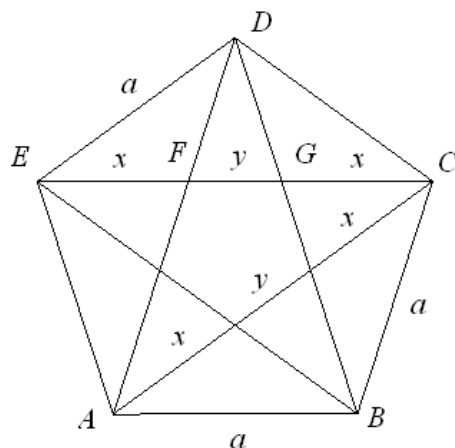
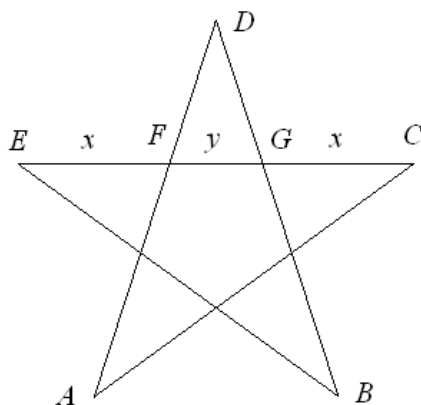
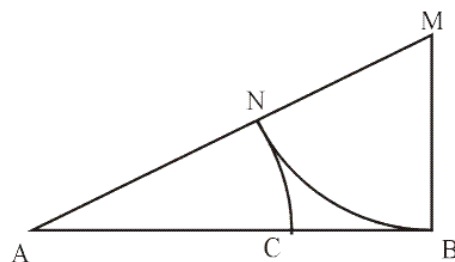
Výpočet poměru zlatého řezu. Umocněním poslední rovnice máme $x^2 = a(a - x)$

a odtud po úpravě $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, kde $\varphi = \frac{a}{x}$ je poměr zlatého

řezu. Smysl má jen kladný kořen této kvadratické rovnice,

tedy $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,618$.

Konstrukce zlatého řezu je znázorněna na obrázku.



Znakem pythagorejců byl hvězdicový pravidelný pětiúhelník (pentagon, pentagram), neboť v sobě skrývá poměr zlatého řezu - každé jeho dvě různě dlouhé úsečky jsou v poměru φ . Při označení podle následujícího obrázku totiž platí

$$\frac{|EF|}{|FG|} = \frac{|EG|}{|EF|} = \frac{|EC|}{|EG|} = \frac{|EC|}{|FC|} = \frac{|FC|}{|GC|}. \quad (1)$$

Vztahy dokážeme doplněním na konvexní pravidelný pětiúhelník (na obrázku napravo). Úhlopříčka AD a EC ohraničují spolu se základnami AC a ED rovnoramenného lichoběžníka $ACDE$ dva podobné trojúhelníky ACF a DEF . Z jejich podobnosti plyne

$$\frac{|AC|}{|ED|} = \frac{|CF|}{|EF|}, \quad \text{odtud} \quad \frac{2x+y}{a} = \frac{x+y}{x}. \quad (2)$$

Dále vidíme, že čtyřúhelník $ABCF$ je rovnoběžník, v němž $|AB| = |BC| = a$, je to tedy kosočtverec, a tak $|AB| = |CF|$, neboli $a = x + y$. Odtud a z druhého ze vztahů (1) plyne

$$\frac{2x+y}{x+y} = \frac{x+y}{x} = \varphi = \frac{x}{y},$$

a odtud dostáváme všechny vztahy (1). (pokud čtenář nepochopil odkud plyne poslední rovnost $\varphi = x/y$, tak ji například získáme ve tvaru $x = \varphi y$ odečtením již dokázaných vztahů $2x + y = \varphi(x + y)$ a $x + y = \varphi x$.)

Význam pythagorejců pro rozvoj matematiky

1. Matematika se stala deduktivní vědou (vyžaduje se zdůvodňování a důkazy),
2. obecný kvantifikátor, důkazy vět typu „pro všechny ... platí ...“,
3. objev nesouměřitelnosti úseček (iracionální čísla) – první krize matematiky

Bod 2 je rozvinut v odstavci **Figurální čísla**, bod 3 v odstavci **První krize matematiky**.

Figurální čísla

Figurální čísla měla spojovat geometrii s aritmetikou. Pythagorejce přitahovala přirozená čísla. Snažili se v nich najít nějaký řád, zákonitosti. Přirozená čísla začali třídit podle tvarů (přirozená čísla byla často nahrazována hromádkou kamínků a kamínky pak třídili do tvarů, do kterých je bylo možno srovnat). Figurální číslo je tedy číslo dané počtem kamínků v obrazci. Tak dospěli k číslům trojúhelníkovým, čtyřúhelníkovým, pětiúhelníkovým ...

Jednička byla chápána jako základní stavební kámen - jednotka a nepatřila mezi čísla trojúhelníková, čtvercová, obdélníková ani žádná jiná. Jednotka nebyla považována za číslo, měla výsadní postavení. Bod sám byl definován jako jednotka, která má polohu.

Trojúhelníková čísla 3, 6, 10, 15 ...Přidáme-li

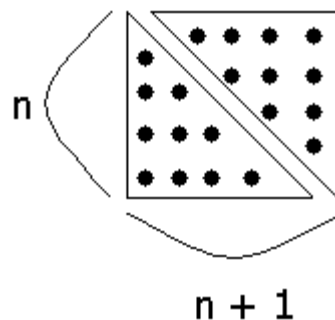
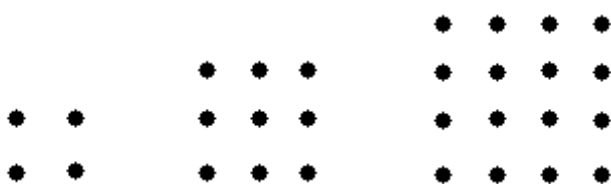
číslo 1 jako 1. člen: $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Tento vzorec

můžeme jednoduše odvodit z faktu, že součet dvou trojúhelníkových čísel je číslo obdélníkové :

Důsledek: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tato metoda odvozování matematických vztahů se nazývá pséfórie (pséfós = kaménky)

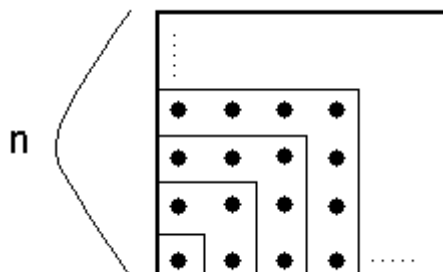
Čtvercová čísla: 4, 9, 16, 25 ...



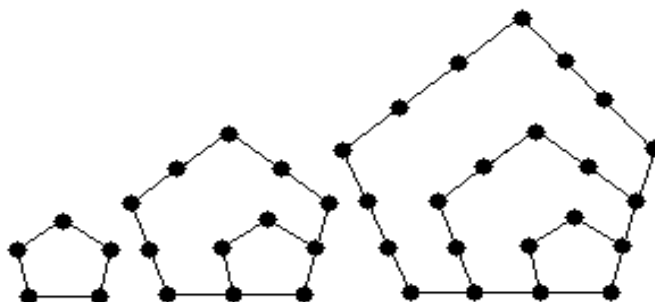
Obecně čtvercové číslo získáme vzorcem $a_n = n^2$.

Pomocí následujícího obrázku lze pséfórií

odvodit vztah pro součet prvních n lichých čísel: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$.

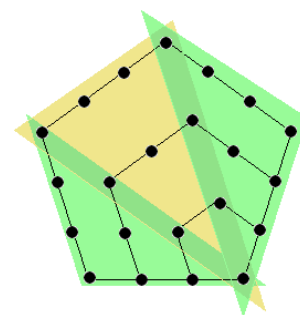


Pětiúhelníková čísla: 5, 12, 22 ...



Obecně pětiúhelníkové číslo získáme pomocí vztahu $c_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$.

Je totiž pětiúhelníkové číslo složené ze tří trojúhelníkových, které se překrývají na sousedících stranách (viz obrázek).

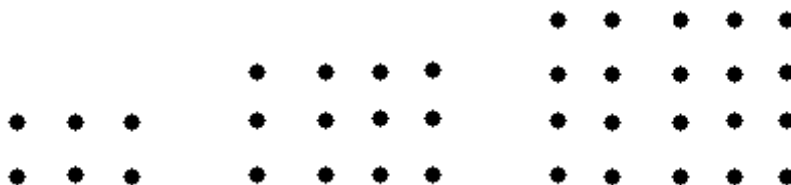


$$c_n = 3T_n - 2n = \frac{3n(n+1)}{2} - \frac{4n}{2} = \frac{1}{2}n(3n-1).$$

Analogicky odvoďte obecný předpis pro utvoření n -tého

m -úhelníkového čísla $a_n = \frac{n}{2}(2 + (n-1)(m-2))$, který se připisuje alexandrijskému matematiku a astronomovi Hypsiklesovi (190? – 120?).

Obdélníková čísla jsou čísla, která můžeme vyjádřit součinem dvou čísel větších než jedna a odpovídají uspořádání kaménků do obdélníku

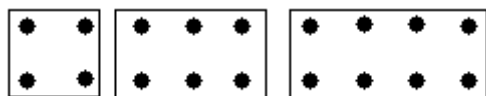


Největší význam přikládali pythagorejci číslům, které se tvarově nejvíce přibližují číslům čtvercovým, tj. číslům 6, 12, 20, 30 ...

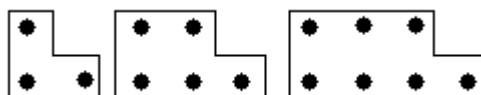
Obecné obdélníkové číslo získáme vzorcem $a_n = n(n+1)$.

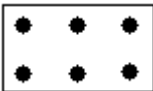
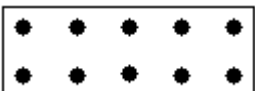
Třídění a rovnání čísel do určitých tvarů přispělo výrazně k pochopení některých matematických poznatků a jejich důkazů. Jako příklad si můžeme ukázat důkaz tvrzení, že součet dvou sudých nebo dvou lichých čísel je číslo sudé.

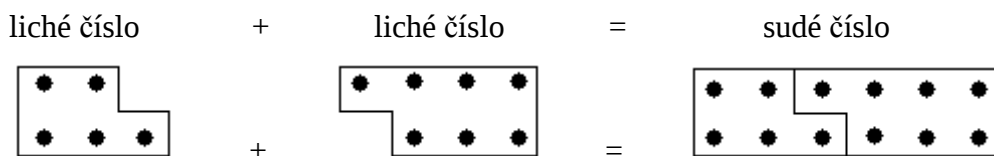
Každé sudé číslo můžeme srovnat do obdélníku, kde jedna strana je vždy 2,



kdežto liché číslo do obdélníku nesrovnáme, vždy nám jeden kámen bude přebývat.



sudé číslo	+	sudé číslo	=	sudé číslo
				
	+		=	



Analogicky dokažte, že sudé číslo + liché číslo = liché číslo.

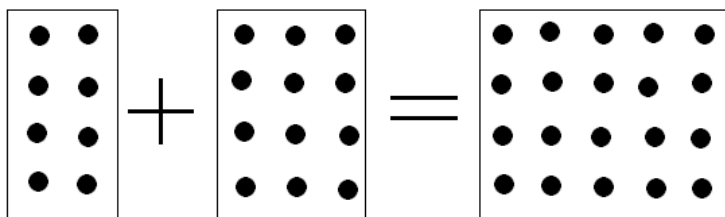
Je třeba si uvědomit, že takové důkazy byly kvalitativním skokem v matematickém myšlení.

Tak například poslední tvrzení v přesnější formulaci zní: *Součet **každých dvou** přirozených čísel, z nichž jedno je sudé a druhé liché, je číslo liché.* Přitom existuje nekonečně mnoho možností, jak zvolit za jeden sčítanec sudé číslo a za druhý liché, a tak **nikdy neověříme pravdivost posledního tvrzení pro všechny situace**. Přesto umíme dokázat, že věta platí.

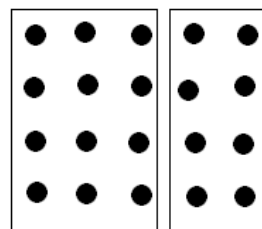
Některá další tvrzení objevená pythagorejci

Poznátky o dělitelnosti:

$$k \mid a \wedge k \mid b \Rightarrow k \mid (a + b)$$



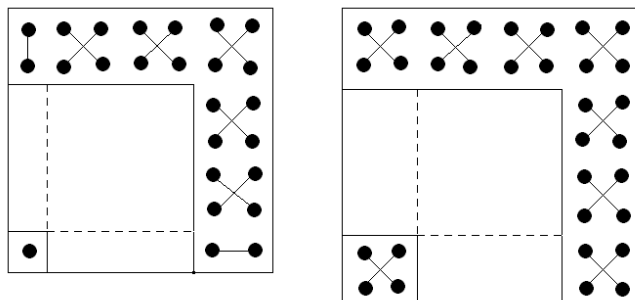
$$D(12, 8) = 4$$



Následující obrázek zdůvodňuje dvě tvrzení:

1. Součet každých dvou po sobě jdoucích lichých čísel je dělitelný čtyřmi,
2. každé čtvercové číslo dává při dělení čtyřmi buď zbytek 1 nebo zbytek 0 (nikdy nedává zbytek 2 nebo 3).

Promyslete!



ELEATSKÁ ŠKOLA

Xenofanés z Kolofónu (580? – 480? př.n.l.)

Potulný básník, satirik, filosof povznesl přírodu na úroveň božstva a „zlidštil“ pythagorejský kult rozumu. Předchůdce eleatů. Odmítal každý druh pověry, bojoval proti víře v zázraky a ve věštění i proti používání peněz jako platidla.

„Kdyby však voli, koně, lvi měli ruce
kdyby mohli rukama kreslit a dovršovat díla jako lidé;
pak koně koním a voli zase volům podobné
tak kreslili by podoby bohů a tvořili těla taková,
jako právě sami mají postavu.“

Parmenidés (540?-450? př.n.l.) „Otec řecké filosofie,“ zakladatel eleatské školy. Snad Xenofanův žák. Uvědomil si kvalitativní rozdíl mezi vnímáním a myšlením (smysly a rozumem): Rovná čára nakreslená na papíru není přímka, je to jen její (nepovedený) model



Zenon z Eley (490 – 430 př.n.l.) Nejslavnější filosof eleatské školy. Pokračoval v Parmenidově práci, hluboká analýza pojmů „pohyb“, „změna“, „jedno a mnohé“, „čas“, „nekonečno“.

Zenonova apória

- I. **Dichotomie.** Není pohybu, protože to, co se pohybuje, musí dojít nejprve do poloviny cesty, než dojde k cíli ... nelze projít nekonečným počtem míst v konečném čase.
- II. **Achilleus a želva.** Pokud má želva sebemenší náskok, pak ve chvíli, kdy se Achilles dostane z bodu A na bod B, je želva již v bodě C. Když je Achilles v bodě C, je želva už v bodě D. Vzdálenosti mezi body se neustále snižují, ale podle Zénona Achilleus želvu nikdy nedohoní.
- III. **Letící šíp.** Letící šíp pozorovaný v jakýkoliv okamžik svého pohybu se nachází na jednom místě, v kterém je *de facto* v klidu. Pokud je ale v klidu v každém okamžiku svého letu, znamená to, že je v klidu i v čase, což znamená, že se nepohybuje.
- IV. **Stadion.**



Podle Zenona tedy i nejjasnější věci, jdeme-li jim kriticky do jádra, mohou se ukázat jako pochybné, nejisté, rozporné. Chtěl upozornit na nedostatky formálního logického myšlení. Třebaže paradoxy snadno vysvětlíme pomocí nekonečných geometrických řad, jsou Zénonovy argumenty z hlediska filosofie dodnes předmětem sporů.

Řekové rozlišovali **potenciální nekonečno**, tzn. nekonečno v možnosti (např. k libovolně velkému číslu můžeme zvolit číslo ještě větší) a **aktuální nekonečno**, tedy nekonečno „uskutečněné“, nekonečno jako celek (např. úsečka jako množina nekonečně mnoha bodů).

Vzhledem k Zenonovým aporiím se řeční matematici vyhýbali pojmu aktuální nekonečno a *pracovali zásadně jen s nekonečnem potenciálním*. (Například Euklides netvrdí, že prvočísel je nekonečně mnoho, ale vyjadřuje se opatrněji: „Prvočísel je více, než jakékoli dané množství prvočísel,“ což je v podstatě ekvivalentní s tvrzením „K libovolně velkému prvočíslu můžeme nalézt ještě větší prvočíslo.“)

Řeční atomisté (Leukippos (500? – 440? př.n.l.), Demokritos (460? – 370? př.n.l.)) řeší Zenonova apória učením, že svět je tvořen atomy - základními částicemi, které již dále nelze dělit. Atomy různých látek jsou různě velké, různě hmotné, neviditelné, nedělitelné a nezničitelné. Jsou odděleny prázdným prostorem a jsou v neustálém pohybu. Vznik a zánik věcí je vlastně spojování a rozlučování atomů. Vše se děje podle osudu a zákona. Atomisté uznali nejsoucno (tj. prázdný prostor) pohyb, změnu, vznik, zánik.

Pozn. Zenon byl mistrem dialektiky a disputací, hojně používá „důkazu sporem“ – přijímal argumenty protivníků, které chtěl vyvrátit a dovedl je do absurdit a nesrovnalostí (příklad - rozhovor s Protágorem).

Objev nesouměřitelnosti, první krize matematiky

Ve starověkém Řecku znali pouze s kladná čísla, která bylo možné znázorňovat jako délky úseček. Představovali si, že každé dvě úsečky a , b jsou *souměřitelné*. To znamenalo, že lze pro ně najít společnou míru, tím je míněna úsečka d , kterou lze beze zbytku „naskládat“ jak do úsečky a , tak i do úsečky b (viz obrázek). Délky úseček budeme označovat stejnými písmeny jako úsečky. Navíc označíme písmenem p (resp. q) počet úseček d , které se vešly do úsečky a (resp. do úsečky b). Pak

$$a = pd \quad a = b = qd, \text{ neboli } \frac{a}{b} = \frac{pd}{qd} = \frac{p}{q}. \quad (\text{na obrázku je } p = 7 \text{ a } q = 3.)$$



Je zřejmé, že každé dvě úsečky a , b mají nekonečně mnoho společných měr. Je-li totiž d společnou mírou úseček a , b , pak je jejich společnou mírou i úsečka $d_n = d/n$, kde n je přirozené číslo.

Jestliže zvolíme za jednotku délky úsečku b , má úsečka a délku $a = \frac{a}{b} \cdot b = \frac{p}{q}$, kde p , q jsou přirozená čísla. Odtud plyne, že Řekové tehdy znali jen *racionální kladná čísla*.

Pythagorejci však objevili dvojice úseček, které jsou nesouměřitelné (tj. nemají společnou míru) - například strana a úhlopříčka čtverce nebo strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka. Objev nesouměřitelnosti vyvolal značný údiv, snad i zděšení, zhroucení původních pythagorejských představ o vzájemném vztahu čísel a geometrických veličin. Nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce prý dokázal pythagorejce Hippasus. Podle pověsti byl později svržen z lodi do moře a utopen. Podle jedné verze proto, aby tento objev zůstal utajen, podle jiné proto, že objev vyzradil.

Objev nesouměřitelnosti způsobil tzv. **první krizi matematiky**.

Než si sdělíme, jak tuto krizi Řekové řešili, uvedeme několik hypotéz, jak asi nesouměřitelnost objevili.

Vlastnosti čtverce

Předpokládejme, že strana a i úhlopříčka u čtverce $ABCD$ jsou souměřitelné úsečky a jako jednotku délky zvolme jejich největší společnou míru.

Pak jsou čísla

$$a = |AB| = |BC|, \quad b = |AC|$$

přirozená a nesoudělná.

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC plyne $u^2 = 2a^2$ - viz obr. (a), je proto u^2 sudé a tedy i číslo u sudé (zdůvodněte proč). Jestliže však v posledním vztahu položíme $u = 2k$, kde k je přirozené, můžeme jej upravit na tvar $2k^2 = a^2$. Je tedy i číslo a je sudé, a to je spor s předpokladem nesoudělnosti čísel a, u . Úsečky a, u tedy **nemají společnou míru**.

Důkaz nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce metodou nekonečného sestupu.

Nechť strana a i úhlopříčka u čtverce $ABCD$ jsou souměřitelné úsečky, jejich libovolnou společnou míru zvolíme jako jednotku délky. Pak jsou čísla a, u přirozená a z Pythagorovy věty $2k^2 = a^2$ pro trojúhelník ABC - viz obrázek (b) - plyne, že u je sudé číslo. Výška BS_1 rozděluje trojúhelník ABC na dva poloviční (rovnoramenné a pravoúhlé) trojúhelníky. Přepóna i délky odvěsen kteréhokoliv z nich, například pravoúhlého trojúhelníka ABS_1 jsou opět přirozená čísla, neboť $|AB| = a$, $|AS_1| = |BS_1| = u/2$, avšak u je sudé. Analogicky zjistíme, že i délky stran trojúhelníka BS_1E_1 , který je polovinou trojúhelníka ABS_1 ,

jsou přirozená čísla, stejně tak délky stran jeho poloviny, to znamená trojúhelníka $S_1E_1S_2$ atd. Můžeme takto půlit (zmenšovat) trojúhelníky donekonečna a pořád budou mít jako délky stran přirozená čísla. To však není možné, protože jakkoliv velkého přirozeného čísla n může zmenšováním vzniknout nejvýše $n-1$ přirozených čísel. Jsou to čísla $n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

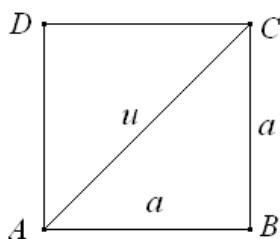
Pravidelný pětiúhelník

Předpokládejme, že úhlopříčka a strana pravidelného pětiúhelníka jsou souměřitelné úsečky a jako jednotku délky zvolme jejich největší společnou míru. Pak jsou délky u, a **nesoudělná** celá čísla (viz obrázek). Z podobnosti trojúhelníků ABF a CEF plyne

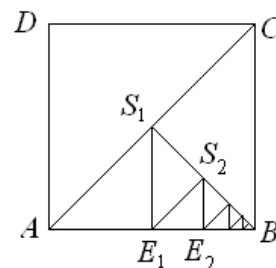
$$\frac{u}{a} = \frac{a}{u-a}, \text{ což je ekvivalentní s rovností } u \cdot (u-a) = a \cdot a.$$

Budeme zkoumat poslední vztah podle parity. Protože u, a nemohou být obě sudá čísla, mohou nastat jen tři situace:

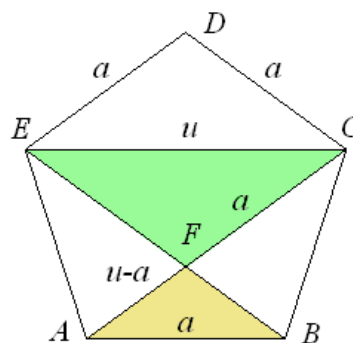
- a je sudé, u liché,
- a je liché, u je liché,
- a je liché, u sudé.



(a)



(b)



Nastává-li situace a) je levá strana vztahu typu $L \cdot (L - S)$, tedy liché číslo, kdežto pravá strana je číslo sudé, a tak rovnost $u \cdot (u - a) = a \cdot a$ neplatí. Analogicky ověřte, že neplatí ani ve zbývajících dvou situacích.

Z předpokladu souměřitelnosti úseček u , a jsme zjistili, že vztah $u \cdot (u - a) = a \cdot a$ nemůže platit. **Je proto úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka nesouměřitelná s jeho stranou.**

Dokážeme toto tvrzení ještě metodou nekonečného sestupu. Na dalším obrázku jsme prodloužili dvě sousední strany pravidelného pětiúhelníka a do vzniklého úhlu vepíšeme stále menší a menší pravidelné pětiúhelníky uvedeným způsobem. Jak již víme z předchozího, pro původní pětiúhelník je úhlopříčka a strana v poměru zlatého řezu

$$\frac{u}{a} = \frac{a}{u-a} \quad (+)$$

Postupujeme-li shora, má druhý pravidelný pětiúhelník délku strany $u-a$ a úhlopříčku a , Třetí má stranu $a-(u-a)=2a-u$ a úhlopříčku $u-a$, čtvrtý stranu $(u-a)-(2a-u)=2u-3a$ a úhlopříčku $2a-u$ atd. Aplikací vztahu (+) postupně na všechny pětiúhelníky dostáváme

$$\frac{u}{a} = \frac{a}{u-a} = \frac{u-a}{2a-u} = \frac{2a-u}{2u-3a} = \frac{2u-3a}{5a-3u} = \dots \quad (++)$$

Jak vidíme z těchto vztahů, čitatele i jmenovatele zlomků se neustále zmenšují a přitom to musí být stále přirozená čísla (rozdíl dvou přirozených čísel je vždy číslo celé, navíc to zde musí být číslo kladné, neboť představuje vždy délku úsečky). To však není možné činit donekonečna, a tak jsou a , u nesouměřitelné úsečky.

Poznamenejme, že koeficienty v čitatelích a jmenovatelích zlomků (++) tvoří tzv. **Fibonacciho posloupnost**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., která začíná čísly 1, 1 a v níž je každý člen od třetího počínaje roven součtu předchozích dvou.

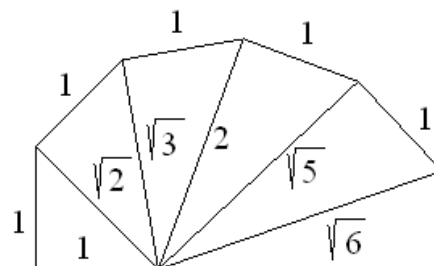
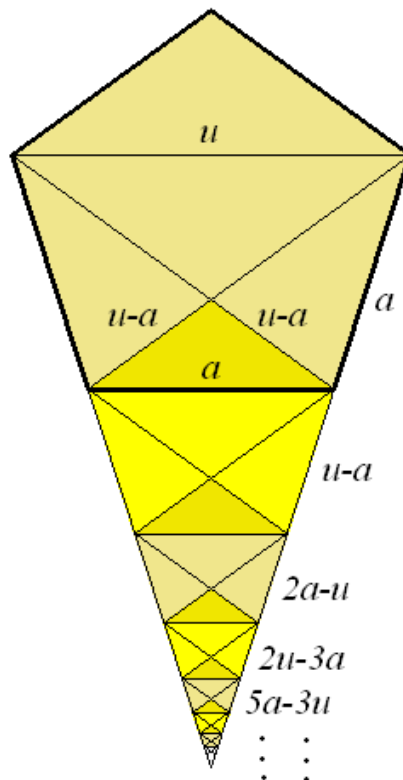
Důsledky první krize matematiky

Začaly se studovat iracionality:

5. st. př.n.l. **Theodoros z Kyrény** údajně dokázal iracionalitu čísel typu $\sqrt{n}$, kde $n \in \mathbb{N}$, až po $\sqrt{17}$. Jejich konstrukci prováděl podle obrázku.

Archytás (428? – 365? př.n.l.): $\sqrt{n(n+1)}$ je iracionální.

Theaitétos (414? – 369? př.n.l.) provedl klasifikaci iracionalit.



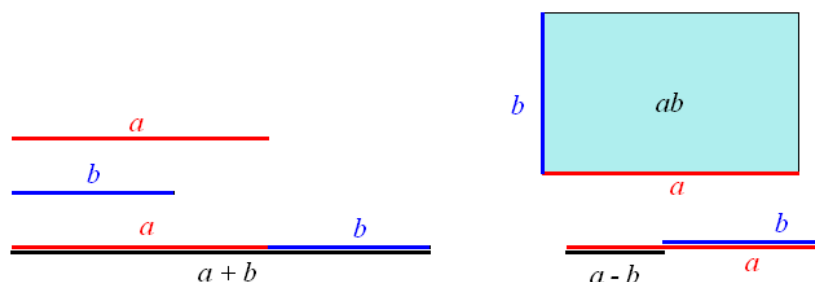
Eudoxos z Knidu (408? – 355? př.n.l.), Archytův žák, vytvořil **teorii proporcí**. Byla to teorie poměrů a úměr geometrických veličin, která představovala starověkou teorii iracionálních čísel. Byla předchůdkyní Dedekindova zavedení reálných čísel pomocí tzv. řezů.

Dodnes obecně nedokážeme přesně určit pomocí aritmetiky součty, mezi jejichž sčítanci jsou iracionální čísla (například $\sqrt{2} + \sqrt{3}$). Tento problém vedl Řeky k odklonu od aritmetiky a algebry. Matematici počali upřednostňovat geometrii, neboť v ní šlo (alespoň v principu přesně) součty s iracionálními čísly sestavovat. Tak vznikla tzv. **řecká geometrická algebra** pomocí níž byly řešeny algebraické problémy konstrukcemi geometrických útvarů.

Řecká geometrická algebra

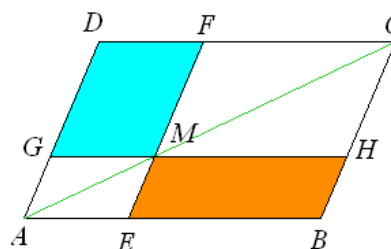
Ve snaze vyřešit problémy první krize matematiky došlo k přechodu od aritmetického chápání veličin ke geometrickému. Pracovalo se s geometrickými veličinami; s délkami čar, obsahy útvarů a objemy těles. Přitom se důsledně dodržoval **princip homogenity – sčítat a odčítat lze jen veličiny téhož řádu**. Veličiny prvního řádu byly délky čar, veličiny druhého řádu byly obsahy, veličiny třetího řádu byly objemy. Pokud šlo o násobení, pak **součinem dvou délek mohl být jedině obsah, součinem obsahu s délkou objem**, součin dvou obsahů neměl smysl apod.

Geometrické násobení, sčítání a odčítání veličin prvního řádu znázorňuje následující obrázek:



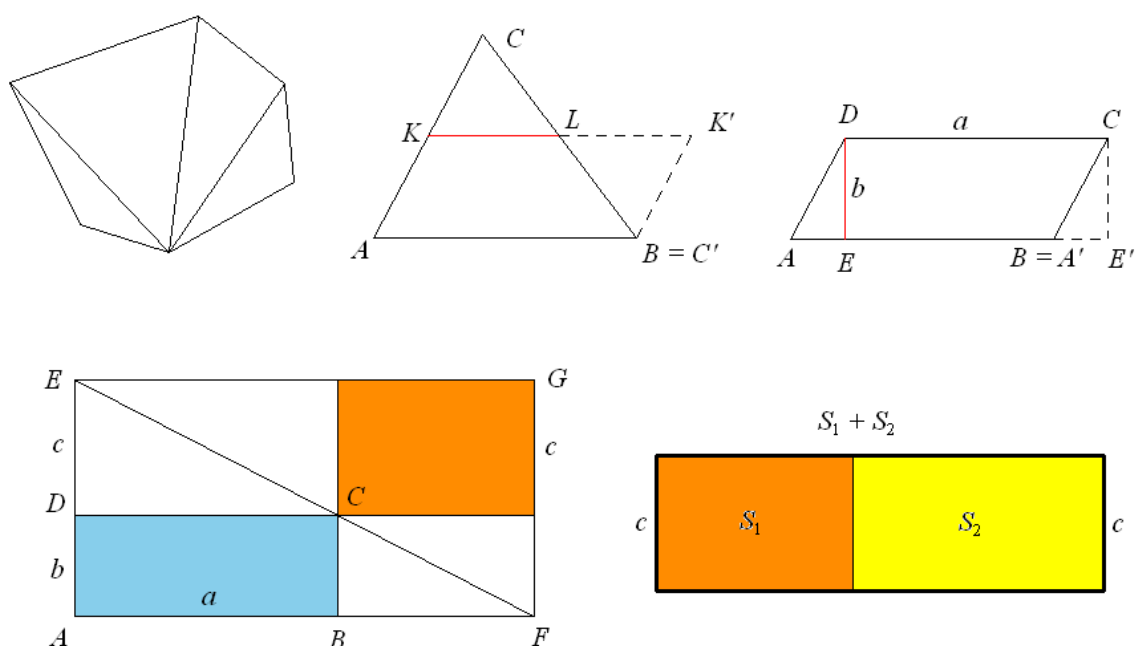
Pro počítání s obsahy (veličinami druhého řádu) se využíval poznatek, že pro libovolný bod M uvnitř úhlopříčky rovnoběžníka odřezávají z rovnoběžníka přímky, které jsou vedené bodem M rovnoběžně se stranami rovnoběžníka $ABCD$, rovnoběžníky téhož obsahu (viz obrázek). Pro obsahy trojúhelníků na obrázku totiž můžeme položit

$$S_{ACD} = S_{ACB} = S_1, \quad S_{AMG} = S_{AME} = S_2, \\ S_{MCF} = S_{MCH} = S_3,$$

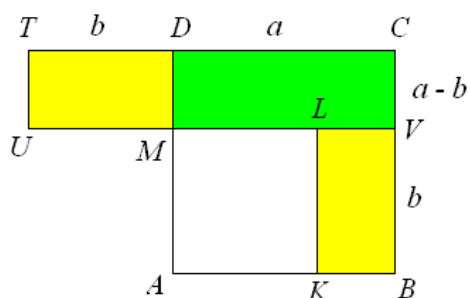


a tak má modrý i hnědý rovnoběžník obsah $S = S_1 - (S_2 + S_3)$.

Geometrické sčítání obsahů n -úhelníků lze provést následovně (viz dolní sérii obrázků): Každý n -úhelník lze rozřezat na trojúhelníky. Každý trojúhelník můžeme převést na rovnoplochy rovnoběžník a ten pak na pravoúhelník téhož obsahu. Takový pravoúhelník pak lze převést na pravoúhelník téhož obsahu, avšak s pevně zvolenou délkou strany, označme ji c . Konstrukci vidíme v levém dolním rohu: Obdélník $ABCD$ má strany délek a , b a chceme jej převést na pravoúhelník o též obsahu a s jednou stranou délky c . Bod E sestrojíme jako průnik polopřímky opačné k polopřímce DA a kružnice se středem D a poloměrem c . Bod F získáme jako průsečík přímek AB a EC . Obrazec doplníme na obdélník $AFGE$. Přímky CD a BC v něm ohraničí požadovaný (hnědě vybarvený) pravoúhelník. Pravoúhelníky se stranou délky c lze snadno sčítat, jak naznačuje následující obrázek.



Vzorce $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ byly odvozovány pomocí obrázku napravo. Pro každý ze vzorců doplňte do obrázku označení délek.



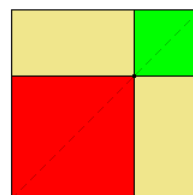
K důkazu vztahu

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

lze využít obrázek vlevo, kde

levou stranu vzorce, tedy rozdíl obsahů čtverců $ABCD$ a $AKLM$, můžeme interpretovat jako obsah tzv. gnómonu - obrazce $KBCDML$. Ten lze rozdělit na dva pravoúhelníky. Přemístěním toho z nich, který je žlutě vybarven, do polohy

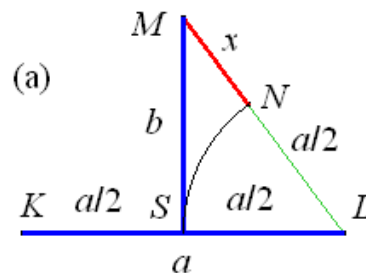
$UMDT$ získáme pravoúhelník $TUVC$ jehož obsah je dán pravou stranou dokazovaného vztahu.



Dnešní zápis kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ by ve starověkém Řecku neměl smysl, pokud a, b, c jsou veličiny téhož řádu (nelze sčítat úsečku c s obsahy x^2 a ax , navíc neznali záporná čísla a nulu). Proto se rozlišovalo několik různých typů kvadratické rovnice:

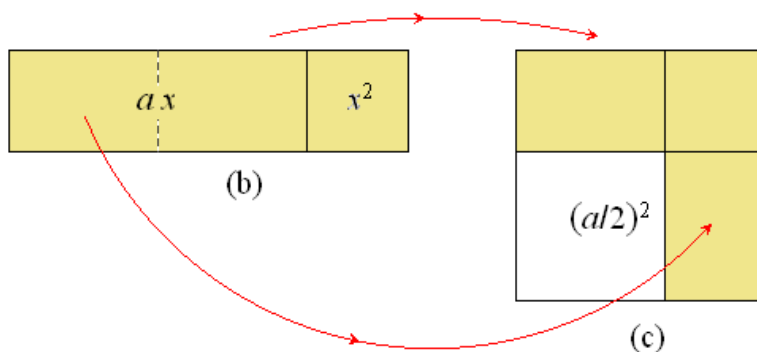
$$ax + x^2 = b^2, \quad ax - x^2 = b^2 \text{ pro } b \leq \frac{a}{2}, \quad x^2 - ax = b^2 \text{ a } x^2 = ab.$$

Řešení kvadratické rovnice $ax + x^2 = b^2$ sestrojovali postupem na obrázku (a). Sestrojili úsečku KL délky a , na její osu nanесли od středu úsečky délku b (úsečka SM), pak na úsečku LM kružítkem přenesli délku $a/2$, tím získali bod N . Délka úsečky MN pak určovala kořen x dané rovnice.



Zdůvodnění konstrukce

Levá strana rovnice představuje součet obsahů pravoúhelníku a čtverce na obrázku (b). Odřízneme polovinu pravoúhelníku podél čárkované úsečky a přiložíme k dolní straně čtverce, jak znázorňuje obrázek (c). Vznikne gnómón, jehož obsah je roven rozdílu obsahů čtverců



o stranách $x + \frac{a}{2}$ a $\frac{a}{2}$. Má však též obsah $ax + x^2 = b^2$, a tak platí $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$.

Odtud plyne výše uvedená konstrukce délky x , neboť vztah představuje Pythagorovu větu pro trojúhelník MLS na obrázku (a).

Poznámka. Porovnejte uvedený postup s tzv. doplněním na úplný čtverec, tzn. úpravou, která se dnes používá na středních školách: Rovnici $ax + x^2 = b^2$ přepíšeme do tvaru

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2, \text{ z něžž plyne } \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2.$$

Analogická řešení dalších dvou typů rovnic naznačíme čtenáři ve formě úkolů s nápovědou.

1. Pomocí obrázků (d) a (e) dokažte metodou řeckých matematiků, že je rovnice

$$ax - x^2 = b^2 \quad \left(b \leq \frac{a}{2}\right)$$

ekvivalentní se vztahem

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = b^2.$$

Pak tento vztah využijte ke konstrukci úsečky o délce x .

2. Pomocí obrázků (f) a (g) analogicky dokažte ekvivalenci rovnic $x^2 - ax = b^2$

$$a \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2.$$

Poslední vztah pak využijte ke konstrukci úsečky délky x .

Všechna uvedená využití gnómónů mají společnou vlastnost, kterou později (~ 300 př.n.l.) formuluje ve svých Základech (kniha II, věta V, citát převzat ze Servítova překladu) Eukleides takto:

„Když se přímka¹ rozdělí v úsečky stejné a nestejné, pravoúhelník nestejnými úsečkami celé sevřený se čtvercem úsečky mezi průsečíky rovná se čtverci půlky.“

Abychom si ujasnili oč jde, vyslovíme větu v dnešním jazyce matematiky takto:

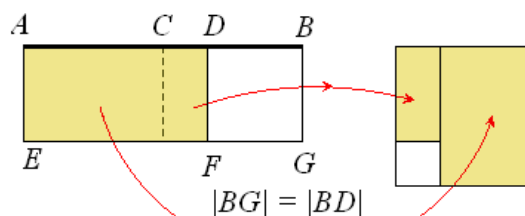
Je-li AB úsečka se středem C a D libovolný vnitřní bod úsečky AB , pak

$$|AD| \cdot |BD| + |CD|^2 = |BC|^2. \quad (+)$$

Důkaz plyne z obrázku. Abychom ukázali algebraickou interpretaci vztahu (+), označíme

$$|AD| = a \text{ a } |BD| = b. \text{ Pak } |BC| = \frac{a+b}{2} \text{ a}$$

$$|CD| = |BC| - |BD| = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}.$$



¹ Toto slovo znamená úsečku, nikoliv přímku v dnešním slova smyslu. Přímkami rozuměli Řekové úsečky libovolně zvolené délky.

Platí tedy

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

(++)

což by dnešní středoškolák snadno dokázal po umocnění výrazů v závorkách.

Poslední rovnice,

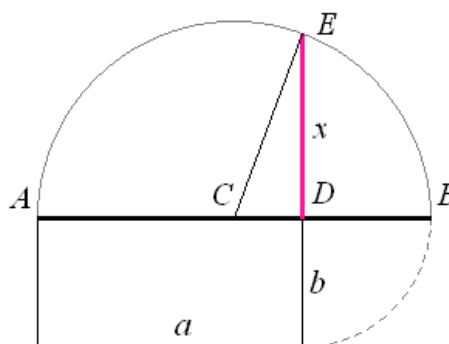
$$x^2 = ab, \quad (*)$$

se metodami řecké geometrické algebry původně převáděla způsobem naznačeným v posledním obrázku na ekvivalentní vztah

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \quad (**)$$

z něž pak lze sestavit x pomocí Pythagorovy věty (promyslete celý postup řešení).

Rovnice (*) představuje úlohu, v níž se má najít strana x čtverce téhož obsahu, jako má pravoúhelník se stranami a , b . (Jinak řečeno, máme převést daný pravoúhelník na čtverec téhož obsahu.) Poměrně složitou konstrukci přes rovnici (**) později zjednodušil Euklides ve větě 14 druhé knihy Základů do postupu (používaného ještě dnes na středních školách), který je zřejmý z obrázku napravo.



Původní Euklidovo zdůvodnění konstrukce můžeme zformulovat následovně:

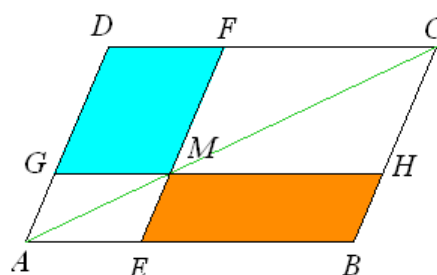
Pomocí vztahu (+) a Pythagorovy věty pro trojúhelník CDE dostáváme

$$|AD| \cdot |BD| + |CD|^2 = |BC|^2 = |DB|^2 = |DE|^2 + |CD|^2.$$

Tedy $|AD| \cdot |BD| = |DE|^2$ a odtud $|DE| = x = \sqrt{ab}$.

Vztah $|DE|^2 = |AD| \cdot |BD|$ pro výšku DE v pravoúhlém trojúhelníku ADE s přeponou AB dnes nazýváme Euklidova věta o výšce. Euklides ji však jako samostatnou větu nevyslovil. V jeho Základech vztah vystupuje jen v řešení úlohy, v níž se má k danému čtyřúhelníku sestavit čtverec téhož obsahu.

Lineární rovnice $ax = b$ pro veličiny a , b , x téhož řádu neměla ve starověkém Řecku smysl. Například pro úsečky představovala levá strana rovnice obsah a ten se nemohl (viz princip homogenity) rovnat úsečce. Proto se lineární rovnice zapisovaly ve tvaru $ax = b^2$. K jejímu řešení se využíval již zmíněný poznatek, že pro libovolný bod M uvnitř úhlopříčky

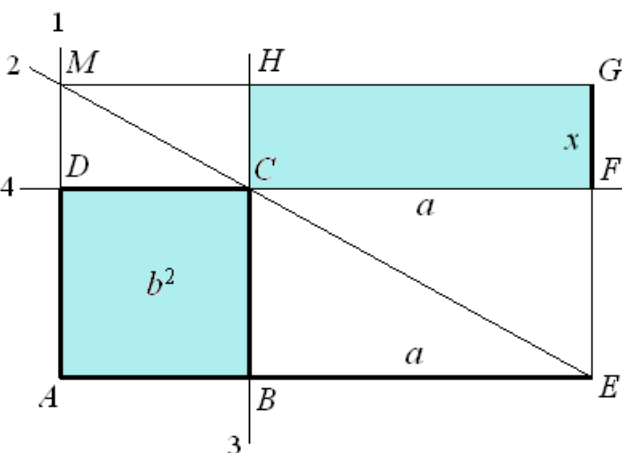


rovnoběžníka odřezávají z rovnoběžníka přímky, které jsou vedené bodem M rovnoběžně se stranami rovnoběžníka $ABCD$, rovnoběžníky téhož obsahu (viz obrázek). Pro obsahy trojúhelníků na obrázku totiž můžeme položit

$$S_{ACD} = S_{ACB} = S_1, \quad S_{AMG} = S_{AME} = S_2, \quad S_{MCF} = S_{MCH} = S_3,$$

a tak má modrý i hnědý rovnoběžník obsah $S = S_1 - (S_2 + S_3)$.

Řešení rovnice $ax = b^2$ představuje následující obrázek. Stranu AB čtverce $ABCD$ s obsahem b^2 prodloužíme za bod B o úsečku BE délky a . Pak sestrojíme bod M jako průsečík přímek EC a AD . Trojúhelník AEM doplníme na pravoúhelník $AEGM$. Přímky 3 a 4 vedené bodem C rovnoběžně se stranami rovnoběžníka $AEGM$ určují pravoúhelník $CFGH$ s obsahem $b^2 = ax$ a stranou CF délky a . Má tedy sousední strana FG délku x .



Poznatek o stejných obsazích rovnoběžníků byl v řecké geometrické algebře často využíván. Uvedeme ještě jednu ukázkou - důkaz 27. věta z šesté knihy Euklidových Základů. Původní znění věty je dosti složité, ale můžeme ji (s ohledem na dnešní matematické představy) vyslovit takto:

Ze všech rovnoběžníků $AKLM$ vepsaných do daného trojúhelníka ABC tak, že body K, L, M leží na stranách AB, BC, CA (v daném pořadí) má největší obsah ten, u něž se bod L nachází ve středu úsečky BC .

Důkaz (podle Základů, upraven):

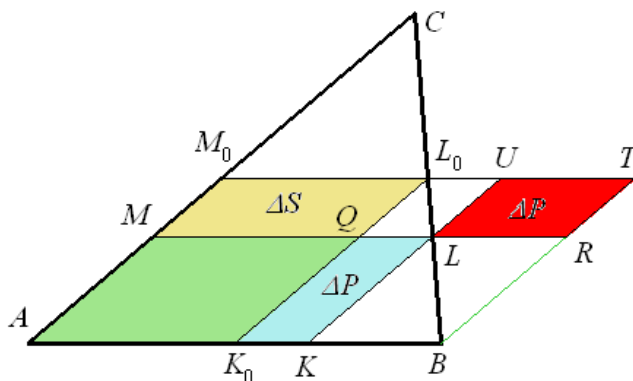
Z obrázku vidíme, že vepsaný rovnoběžník $AK_0L_0M_0$, kde L_0 je střed strany BC , má větší obsah, než který-koli vepsaný rovnoběžník $AKLM$, pro který je $L \neq L_0$. Platí totiž

$$S_{AKLM} = S_{AK_0L_0M_0} - \Delta S + \Delta P,$$

avšak $\Delta S > \Delta P$, neboť

$$\Delta S = S_{MQL_0M_0} = S_{QRTL_0} > \Delta P.$$

(Rovnoběžníky K_0KLQ a $LRTU$ totiž mají stejný obsah.)



Proslulé úlohy starověku

Časem se ve starověkém Řecku ustálila pravidla rýsování geometrických obrazců do tzv. euklidovských konstrukcí. Termín *Euklidovská* (resp. *euklidovská*) *konstrukce* nebo *konstrukce pomocí kružítka a pravítka* označuje konstrukci geometrických objektů pouze pomocí idealizovaného pravítka a kružítka. O pravítku se předpokládá, že má nekonečnou délku, jen jednu hranu a žádné značky pro měření, o kružítku se předpokládá, že může nakreslit jakkoli velikou kružnici, nelze jím však přenášet vzdálenosti (nelze je užívat jako tzv. odpichovátko).

S rozvojem řecké geometrické patrně souvisí vznik tzv. proslulých úloh starověku, což byly konstrukční úlohy, které se nedařilo vyřešit eukleidovskými konstrukcemi. Třebaže dnes již víme, že **následující úlohy jsou eukleidovsky neřešitelné**, najde se stále dost lidí, kteří se je snaží vyřešit.

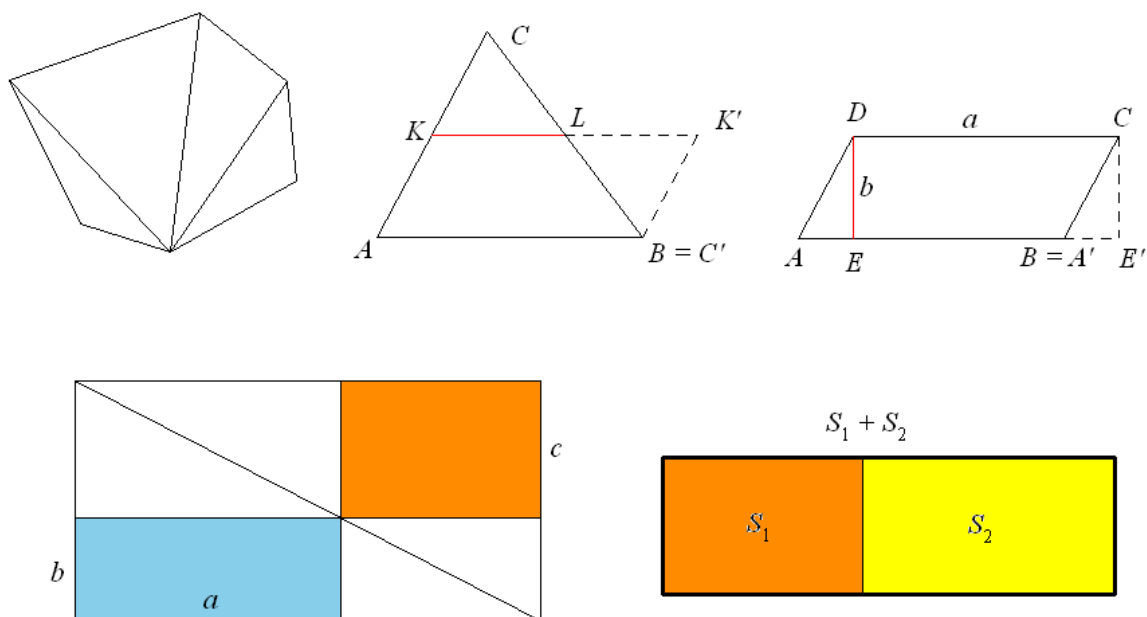
Jsou to tyto úlohy:

1. Kvadratura kruhu - k danému kruhu sestrojít čtverec téhož obsahu.
2. Zdvojení krychle - sestrojít krychli, jejíž objem je dvojnásobkem objemu dané krychle.
3. Trisekce úhlu - rozdělit daný úhel na tři shodné úhly.

Někdy se k nim přidávají ještě tyto dvě:

4. Rektifikace kružnice - sestrojít úsečku, jejíž délka je rovna obvodu dané kružnice.
5. Konstrukce pravidelných n -úhelníků (některé nelze eukleidovsky sestrojít).

Řekové uměli geometricky sčítat obsahy n -úhelníků například takto: Každý n -úhelník lze rozřezat na trojúhelníky. Každý trojúhelník můžeme převést na rovnoploché rovnoběžníky a ten pak na pravoúhelník téhož obsahu. Takový pravoúhelník pak lze převést na pravoúhelník téhož obsahu, avšak s pevně zvolenou délkou strany, označme ji c , a pravoúhelníky se stranou délky c lze snadno sčítat. Postup naznačuje následující obrázek:



Obsahy kruhů však geometricky sčítat neuměli. Proto hledali konstrukci, která převádí kruh na čtverec téhož obsahu. To byl problém kvadratury kruhu.

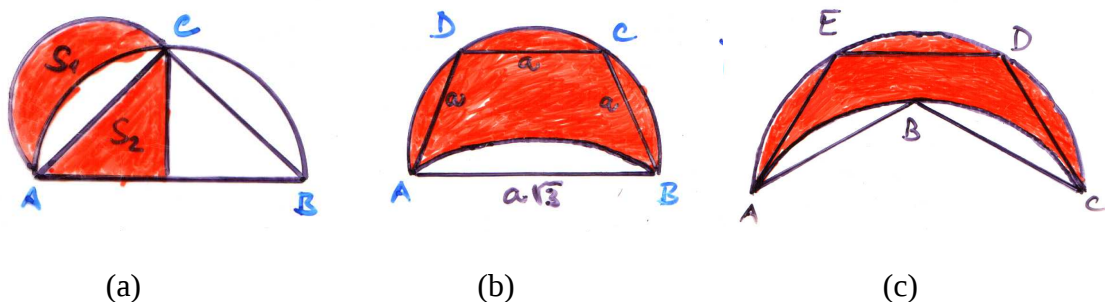
Z analogické problematiky geometrického sčítání objemů těles patrně pochází problém zdvojení krychle.

Pokud jde o dělení veličin, pak není problém eukleidovsky rozdělit úsečku na n stejných dílů. (Vzpomeňte na konstrukci ze základní školy.) V případě úhlů však nastaly problémy již v úloze rozdělit daný úhel na tři shodné úhly, přestože konstrukce dělení úhlu na poloviny je snadná (stejně jako geometrické sčítání a odčítání úhlů).

Rektifikace kružnice vznikla pravděpodobně z potřeby geometricky sčítat a odčítat délky kružnic.

Podíváme se nyní na jednotlivé problémy (omlouvám se za nekvalitní obrázky, časem je nahradím lepšími).

Kvadratura kruhu

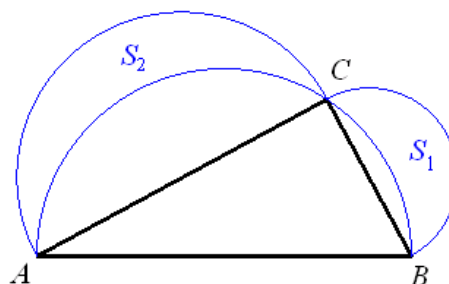


Slibně vypadajících výsledků dosáhl Hippokrates z Chiu (okolo r. 440 př. n. l.), z jehož Základů se dochovaly pouze zlomky. Hippokrates zjistil, že:

- I. Poměr obsahů kruhů je roven poměru obsahu čtverců nad jejich průměry.
- II. Poměr obsahů podobných kruhových úsečí je roven poměru obsahu čtverců nad jejich tětivami.
- III. Půlkružnice nad úsečkami AB a AC rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku ABC na obr. (a) ohraničují „měsíček,“ jehož obsah S_1 je roven polovině obsahu trojúhelníku.
- IV. Na obr. (b) je rovnoramenná lichoběžník vepsán do půlkruhu. Úseče nad tětivami AD , DC a CB jsou navzájem shodné. Je-li každá z nich je podobná úseči nad tětivou AB a poměr podobnosti je $1:\sqrt{3}$, pak obsah vybarveného měsíčku je roven obsahu lichoběžníka.
- V. V pětiúhelníku na obr. (c) platí $|AE|=|ED|=|DC|=a$, $|AB|=|BC|=b$ a $a:b=\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Obsah vybarveného měsíčku je roven obsahu pětiúhelníku $ABCDE$.

Dokažte, že součet obsahů měsíčků ohraničených půlkružnicemi nad stranami pravoúhlého trojúhelníku na dalším obrázku je roven obsahu trojúhelníku.

Dále zkuste dokázat tvrzení I – V.



Zdvojení krychle

Nazývá se též **Délský problém** podle pověsti o moru v roce 430 př. n. l. na ostrově Délos, která se o vzniku problému vypráví:

Řekové ostrově Délos byli postiženi morem. Když mor neustával, ani oběti bohům nepomáhaly, vyslali poselstvo do proslulé věštírny v Delfách. (Město Delfy se nachází asi 150 km severozápadně od Athén. Zbytky věštírny vidíme na obrázku.) Na dotaz, jak řádění moru ukončit dostali odpověď, že že málo uctívají boha Apollóna, který požaduje, aby zdvojnásobili velikost jeho zlatého oltáře tvaru krychle. Obyvatelé ostrova vyrobili ještě jednu stejně velikou zlatou krychli a postavili obě krychle na sebe. Mor řádl dál. Znovu vypravili poselstvo do delfského chrámu,



kde jim bůh Apollón vzkázal, že jsou špatní geometři. Chtěl oltář tvaru krychle, avšak dvojnásobného objemu.

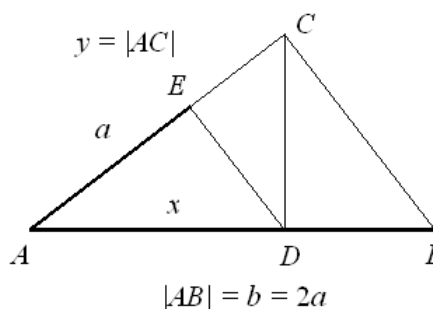
Je dána krychle s hranou délky a . Máme sestavit krychli, která má dvojnásobný objem. K vyřešení potřebujeme sestavit úsečku takové délky x , aby platilo $x^3 = 2a^3$.

Řekové potřebovali najít úsečky délek x a y , které splňují vztah $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, kde $a = \frac{b}{2}$.

Když totiž označíme $\frac{a}{x} = k$, platí $a = kx$, $x = ky$ a $y = kb$. Odtud $a = k^3b$, to znamená

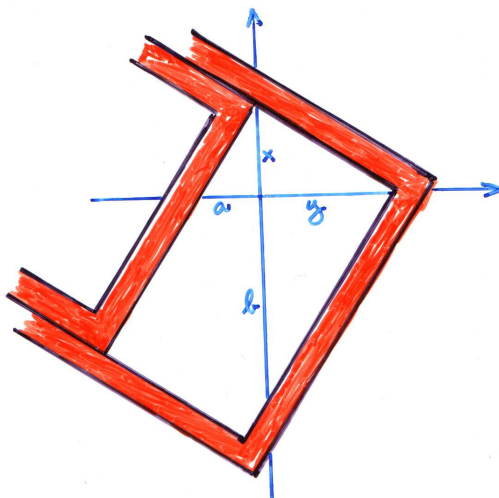
$$\frac{a^3}{x^3} = k^3 = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \text{ neboli } x^3 = 2a^3, \text{ resp. } x = a\sqrt[3]{2}.$$

Hledali tedy eukleidovskou konstrukci pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB a s následující vlastností: Je-li D pata výšky z vrcholu C a E pata kolmice z D na AC , pak platí $|AB| = 2|AE|$ a trojúhelníky ADE , ACD a ABC jsou navzájem podobné (viz obrázek).



Archytás z Tarentu (428? – 365 př. n. l.) našel prostorové seskupení tří rotačních těles, z jehož průmětu takový trojúhelník získáme. Eukleidovsky se to ovšem sestrojít nedalo.

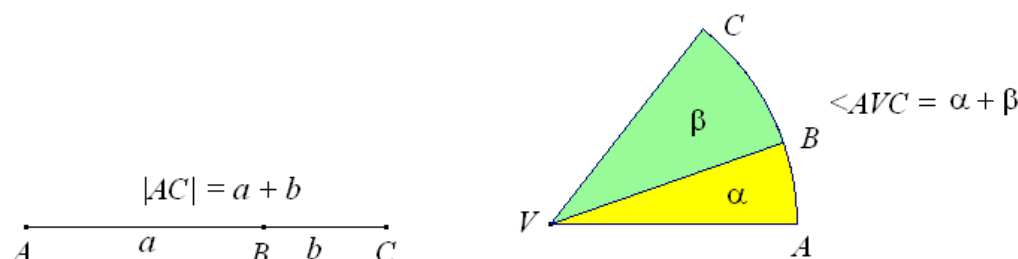
Platón ukázal, že k sestrojení úseček x , y délkám a , b tak, aby platilo $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, stačí dva vhodné tesařské příložníky, které se umístí podle obrázku.
(Tzv. „Platónův křížák - viz obrázek.)



Menaechmos (4. stol. př. n. l.) ukázal, že čísla x , y ze vztahu $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ jsou souřadnice průsečíku parabol $x^2 = ay$ a $y^2 = bx$. Jeho práce představuje první nám známý výskyt kuželoseček v dějinách matematiky.

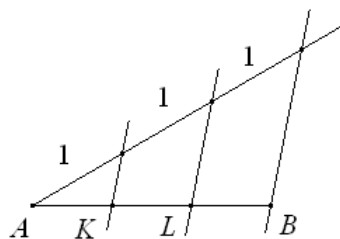
Trisekce úhlu

Geometrické sčítání úhlů a úseček je jednoduché, jak vidíme na prvním obrázku.



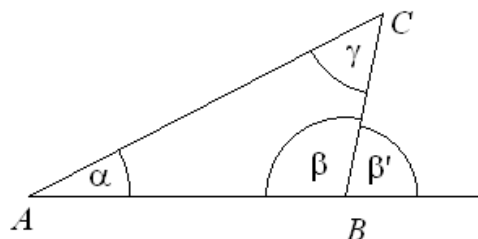
Rozdělit úsečku AB eukleidovskou konstrukcí na n shodných dílů není problém. Popište a zdůvodněte známou konstrukci rozdělení úsečky AB na tři shodné díly, kterou znázorňuje další obrázek.

Pokud jde o rozdělení úhlu na shodné úhly, umíme úhel eukleidovskou konstrukcí (kružítkem) rozpůlit, ale rozdělit jej na tři shodné úhly je eukleidovsky neproveditelné. Řekové ve snaze vyřešit tento problém našli některé neeukleidovské konstrukce. Z nich uvedeme Archimédovu trisekci. Nejprve však připomeneme větu o vnějším úhlu trojúhelníka.



V trojúhelníku na obrázku se úhly α , β , γ nazývají vnitřní úhly trojúhelníka. Úhly k nim přilehlé jsou tzv. vnější úhly trojúhelníka. Značíme je stejnými písmeny s čárkou. Na obrázku je β' vnější úhel přilehlý k úhlu β . Platí

$$\gamma' + \gamma = 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma.$$



Odtud plyne věta o vnějším úhlu, kterou lze zapsat vztahem $\gamma' = \alpha + \beta$ nebo vyjádřit slovy: **Velikost vnějšího úhlu trojúhelníka je rovna součtu velikostí protilehlých vnitřních úhlů.**

Trisekci úhlu uměli Řekové vyřešit metodou vkládání (5. až 4. stol. př. n. l.). Postup vidíme na obrázku.

Máme provést trisekci úhlu AVB .

V bodě B sestrojíme rovnoběžku p s ramenem VA a kolmici na toto rameno. Proužek papíru, na kterém jsme sestrojili rysky X, S

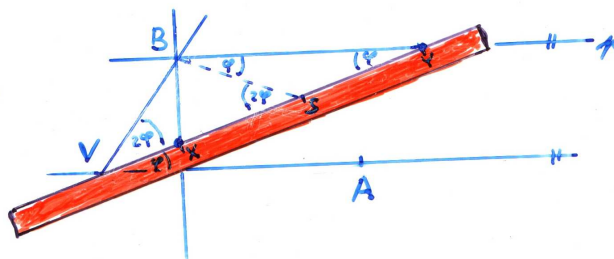
a Y tak, aby $|XS| = |SY| = |BV|$,

umístíme podle obrázku. Trojúhelník XYB je pravoúhlý, proto platí $|BS| = |SY|$ (zdůvodněte!). Je tedy i rovnoramenný a lze položit $\varphi = |\angle BYS| = |\angle YBS|$. Podle věty o vnějším úhlu pro trojúhelník YBS je $|\angle BSV| = |\angle BYS| + |\angle YBS| = 2\varphi$.

Z rovnoramenného trojúhelníku VSB dále plyne, že i $|\angle SVB| = 2\varphi$.

Navíc platí $|\angle AVY| = |\angle YVB| = \varphi$ (úhly střídavé). Odtud máme

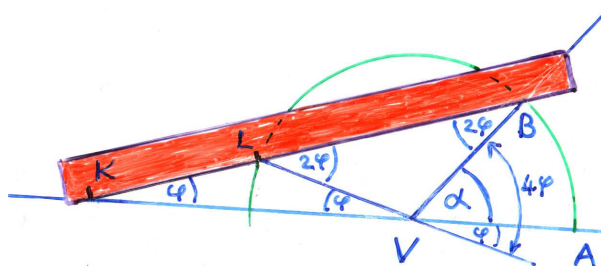
$|\angle AVB| = |\angle AVY| + |\angle YVB| = \varphi + 2\varphi = 3\varphi$. Jinými slovy: Sestrojený úhel $|\angle AVY|$ je třetinou úhlu $|\angle AVB|$. Trisekce je provedena.



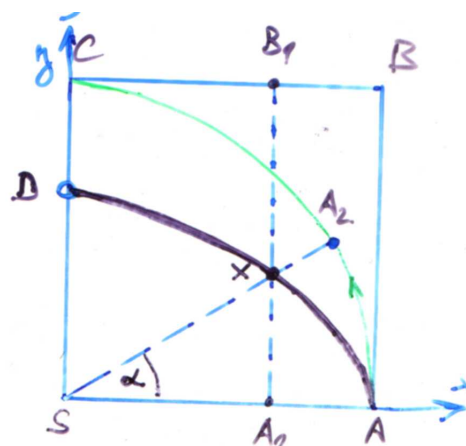
Archimédova trisekce

V zeleně vyznačené kružnici s poloměrem r je AVB středový úhel α , jehož trisekci chceme provést. Proužek papíru s ryskami K, L , jejichž vzdálenost je r , přiložíme podle obrázku a položíme $\varphi = |\angle VKL|$.

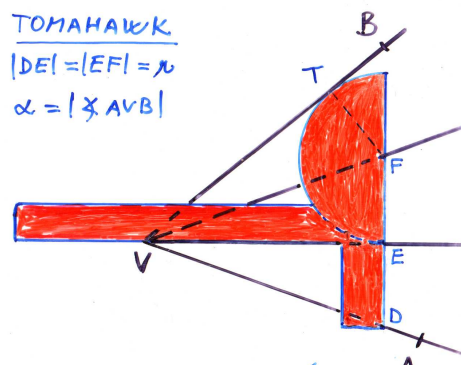
Dokažte, že další úhly mají ty velikosti, jež jsou na obrázku vyznačeny. Z obrázku pak plyne $\alpha = 3\varphi$.



Hippiás z Elidy (5. stol. př. n. l.) vyřešil trisekci úhlu pomocí křivky zvané **kvadratrix** nebo též **Hippiova křivka**: Představte si, že ve čtverci $SABC$ na obrázku se začne úsečka AB posouvat rovnoměrným pohybem doleva a úsečka SA se začne otáčet kolem bodu S s konstantní úhlovou rychlostí proti směru pohybu hodinových ručiček. Oba pohyby současně začnou a současně skončí v poloze SC . Průsečík X obou úseček během pohybu opíše Hippiovu křivku AD . Tato křivka umožňuje převést trisekci úhlu A_2SA na trisekci úsečky A_1A .

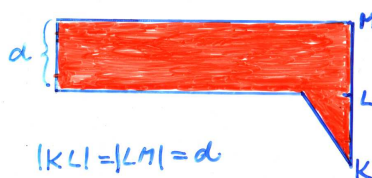


V pozdějších dobách vymysleli lidé různé trisektory – přístroje, které umožňují provádět trisekci úhlu. Další obrázek znázorňuje trisektor zvaný „tomahawk“, který si můžete vyrobit například z kreslicí fólie. Základem je půlkruh a dva obdélníky umístěné podle obrázku. Při označení na obrázku platí $|DE| = |EF| = r$, kde r je poloměr kruhu. Tomahawk umístíme do úhlu AVB^2 , pro nějž chceme učinit trisekci, tak, aby D ležel na ramenu CA , rameno VB bylo tečnou ke kruhu a okraj „topůrka“ vymezený kolmicí na DF v bodě E procházel vrcholem V .



Trojúhelníky VDE a VFE jsou souměrné podle osy VE a trojúhelníky VFT a VFE jsou souměrné podle osy VF . Ze souměrností plyne $|\angle DVE| = |\angle EVF| = |\angle FVT| = |\angle AVB|/3$.

PODOBNĚ SE UŽÍVÁ
TENTO TRISEKTOR:



VYSVĚTLETE JAK

Řecká matematika po zániku Alexandrový říše

R. 334 PK – zahájil Alexandr Veliký tažení do Persie. Chtěl vytvořit světovou říši, v níž by si byli Řekové a Peršané rovni. Na dobytých územích toleroval náboženství původních obyvatel, jejich kulturu a vědu, zakládal nová města. Alexandrem dobytá území postupně obsazovali Řekové (tzv. Heléni - odtud termíny *Helénské období*, *Helénismus*). Do měst přinášeli řeckou kulturu, vědu a řemeslnické dovednosti. Současně přijímali od místních obyvatel vědecké i kulturní poznatky. Řecká matematika pronikla do orientu, zachovala si své tradiční rysy, ale byla Orientem ovlivněna. Úzký styk řecké vědy s Orientem byl nesmírně plodný.

Roku 323 PK, po dobytí velkých území Alexandr zemřel v Mezopotámii. Dobytá území si rozdělili vojevůdci. Egypt – Ptolemaiovci, Mezopotámie a Sýrie – Selekuovci, Makedonie – Antigon.

Alexandrie- nové hlavní město Egypta na břehu moře, vybudováno v roce 331 P.Kr. Bylo to moderní velké město vybudované z kamene a mramoru (tedy odolné proti požárům), mělo kolem 300 000 obyvatel (nepočítaje otroky), široké ulice po nichž mohly projíždět i čtyři vozy vedle sebe, dva přístavy, které chránil ostrov Faros s pověstným majákem více

² Omlouvám se, že z písmena A zbyla na obrázku jen horní část. Je to bod přímky VD napravo od D .

než 100 metrů vysokým. Maják byl jedním ze sedmi divů světa, byl zničen až roku 1 302 obrovským zemětřesením. Ptolemaios zde založil Museion („stánek muž“ - odtud dnešní slovo museum s poněkud jiným významem): středisko učení s proslulou knihovnou. První státem placení vědci. Ptolemaios vydal příkaz shromažďovat knihy. Do celé bývalé Alexandrie vyrazila řada posílů, úředníci v přístavu prohlíželi všechny lodě, zabavovali knihy, dělali jejich opisy a pak originály (nebo u cenných knih pouze kopie) vraceli majitelům. Časem měla knihovna přes 400 000 svazků.

Athény, dosud nejvýznamnější filosofické centrum s dlouholetou tradicí (Sokrates, Platonova Akademie: Theaitetos, Eudoxos, Archytas) ustoupily do pozadí.

Významní alexandrijští matematici: Eratostenes, Euklides, Apollonios z Pergy. V Alexandrii původně studoval i Archimédes, který pak působil v Syrakusách na Sicílii.

Eratostenes byl alexandrijský knihovník, velmi všestranný, učinil významné objevy v různých oborech, ale v každém oboru byl někdo někdo ještě lepší. Říkali mu Beta. Vypracoval metodu hledání prvočísel, tzv. Eratostenovo síto. Upravoval řadu po sobě jdoucích přirozených čísel od čísla 2 počínaje tak, že ponechal vždy první prvočíslo, ke kterému dospěl a odstranil všechny jeho v řadě následující násobky. Řadu měl prý zapsánu na voskové destičce a zmíněné násobky odstranil pomocí horké jehly. Na místech odstraněných čísel zůstaly dírky, odtud název *síto*.

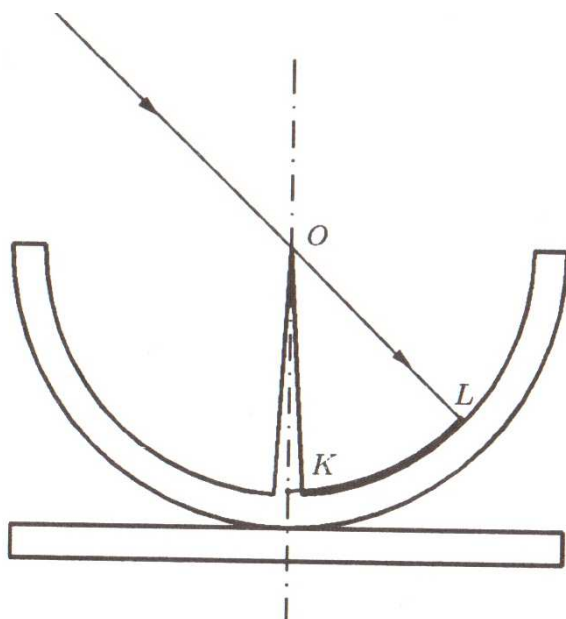
	2	3	X	5	X	7	X	X	X
11	X	13	X	X	X	17	X	19	X
X	X	23	X	X	X	27	X	29	X
31	X	X	X	X	X	37	X	X	X
41	X	43	X	X	X	47	X	X	X
X	X	53	X	X	X	X	X	59	X
61	X	X	X	X	X	67	X	X	X
71	X	73	X	X	X	X	X	79	X
X	X	83	X	X	X	87	X	89	X
X	X	X	X	X	X	97	X	X	X

Eratostenes stanovil obvod zeměkoule. Při měření používal pravděpodobně jako jednotky délky egyptská stadia. Pokud tomu tak bylo, činil by výsledek jeho měření 39 960 km, což se překvapivě málo liší od dnešních 40 000 km.

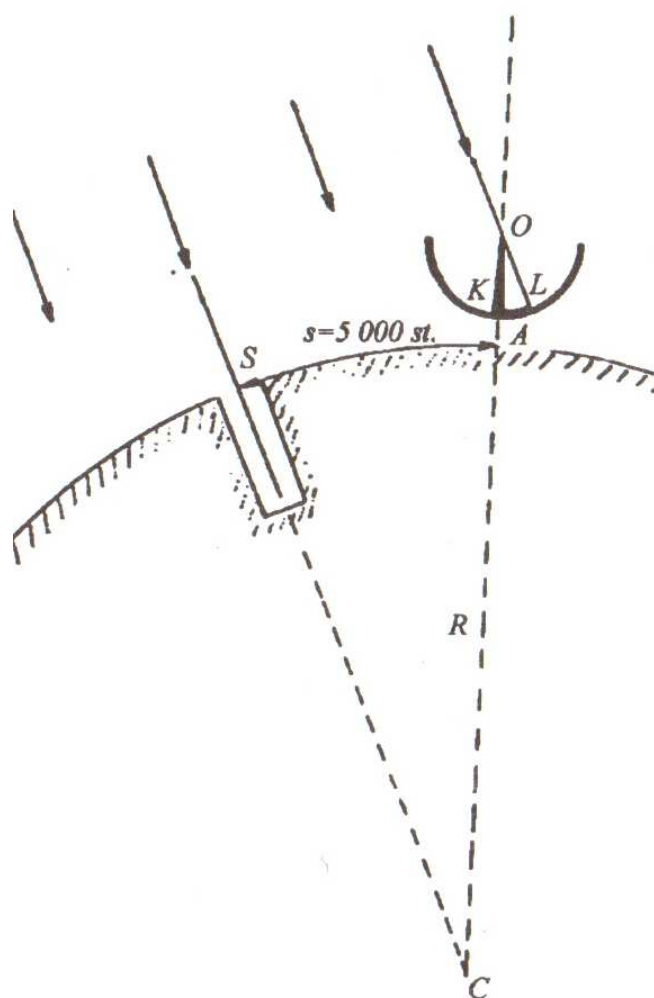
Podstatu jeho měření zde budeme interpretovat jako určování poloměru Země. Bylo známo, že v městě Syena, které se nacházelo 5 000 stadií jižně od Alexandrie, svítí Slunce v poledne v době letního slunovratu „přímo do studní,“ tzn. že zde sluneční paprsky dopadají svisle (vertikálně). Změřil v téže době směr slunečních paprsků v Alexandrii. Měření prováděl pomocí přístroje zvaného skafé, což byla nádoba tvaru polokoule se svislým trnem, tzv. gnómónem, jehož hrot končil ve středu polokoule (obr. 1). Z podobnosti kruhových výsečí ACS a KOL na obr. 2 plyne

$$\frac{R}{r} = \frac{s}{d},$$

kde d je délka oblouku KL a r jeho poloměr.



Obr. 1



Obr. 2

Euklides (Euklid, Eukleides) byl jeden z nejslavnějších alexandrijských matematiků i celé éry starověkého Řecka. O jeho původu a životě mnoho nevíme.

Proslavil se tím, že sepsal **Základy** (stoicheia). Byl to soubor 13 knih, které obsahovaly souhrn dosavadních matematických poznatků doplněný o Euklidovy vlastní objevy. Následuje stručný obsah knih, v závorce je zdroj, ze kterého Euklides pravděpodobně čerpal:

- 1) Základní vlastnosti trojúhelníků a rovnoběžníků, základní konstrukce věty o shodnosti trojúhelníka, Pythagorova věta a její obrácení (pramen Pythagorejci).
- 2) Vzorce $a^2 - b^2$, $(a + b)^2$, kosinová věta, zlatý řez, transformace čtyřúhelníka na čtverec téhož obsahu, kosinová věty (Pythagorejci).
- 3) Kruh a kružnice, středové a obvodové úhly, Thaletova věta, mocnost bodu ke kružnici (Pythagorejci).
- 4) Tětivové a tečnové mnohoúhelníky, vepsaná a opsaná kružnice, konstrukce některých pravidelných n -uhelníků (Pythagorejci).
- 5) Eudoxova teorie proporcí (Eudoxos).

- 6) Podobnost útvarů, zobecnění Pythagorovy věty (pramen neznámý).
- 7) Vlastnosti přirozených čísel (pojednání o teorii čísel - ta je budována pomocí geometrie a délek úseček), dělitelnost $D(a,b,c)$ (Pythagorejci).
- 8) Spojité úměry (konečné geometrické posloupnosti)
- 9) Teorie parity a prvočísel, důkaz, že prvočísel je nekonečně mnoho, součet geometrické řady, dokonalá čísla (Pythagorejci).
- 10) Studium kvadratických iracionalit (Theaitetos).
- 11) Základy stereometrie (kolmost, rovnoběžnost, rovnoběžnostěny)
- 12) Objemy, poměry obsahů (Eudoxos z Knidu).
- 13) Platónská tělesa a jejich vlastnosti (Theaitetos).

V Základech se poprvé setkáváme s **axiomatickou výstavbou matematiky**. Každou knihu Základů Euklides začíná definicemi, základními pojmy. Celkem je v Základech údajně 130 definic, které jsou intuitivní (opírají se o názornou představu) například:

Bod jest, co nemá dílu.

Čára je délka bez šířky.

Hranicemi čáry jsou body.

Přímka (rozuměj libovolně dlouhá úsečka) jest čára která svými body táhne se rovně.

V úvodu první knihy navíc uvádí základní pravidla - premisy³ (axiomy, postuláty), jejichž pravdivost předpokládáme (a tedy nedokazujeme). Obvykle se uvádí, že Euklidových axiomů je pět:

1. Máme-li dány dva body, existuje jedna přímka, která jimi prochází.
2. Každá přímka (tzn. úsečka v dnešní terminologii) může být libovolně prodloužena.
3. Je možné nakreslit kružnici libovolným středem a poloměrem.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. A když přímka protíná dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají⁴ na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

Kromě těchto axiomů ještě uvádí skupinu⁵ dalších devíti pravidel, která matematicky vlastnosti relací rovnosti a nerovnosti a rovněž mají charakter axiomů:

1. Veličiny témuž rovné i navzájem rovny jsou.
2. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou si rovny.
3. A odejmou-li se od rovných rovné, zbývající části rovny jsou.
- (4. A když se přidají k nerovným rovné, celky jsou nerovny.)
5. A dvojnásobky téhož vespolek rovny jsou.
- (6. A polovičky téhož vespolek rovny jsou.)
7. A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.
8. A celek větší než díl.
- (9. A dvě přímky místa neomezují.)

³ Tzv úkoly prvotné podle Servítova překladu Základů.

⁴ z hlediska dnešních představ: protínají se na té straně ...

⁵ Tzv zásady podle Servítova překladu Základů.

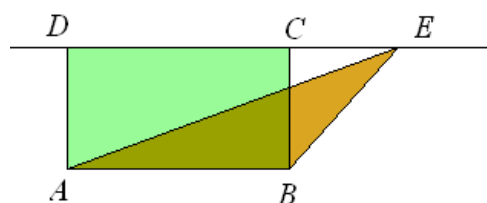
Pomocí definic a axiomů Euklides dokázal přes 465 matematických tvrzení, některá z nich však formuluje jako úlohy, za níž následuje řešení. Způsob, jakým učebnici sepsal byl tak geniální, že se učebnice užívala po celém světě prakticky až do dnešní doby. Syntetická geometrie na středních a základních školách má stále mnoho ze svého obsahu od Euklida převzato. Základy jsou hned po Bibli nejvydávanejší knihou na světě. Jen od vynálezu knihtisku (Guttenberg, 15. stol.) vyšlo v různých státech světa přes 1 000 vydání.

Jak jsme naznačili, je mnoho poznatků v Základech převzato z prací jiných matematiků. Uvedeme příklady některých vět, resp. důkazů, které snad pochází přímo od Euklida.

1. Euklidův důkaz Pythagorovy věty

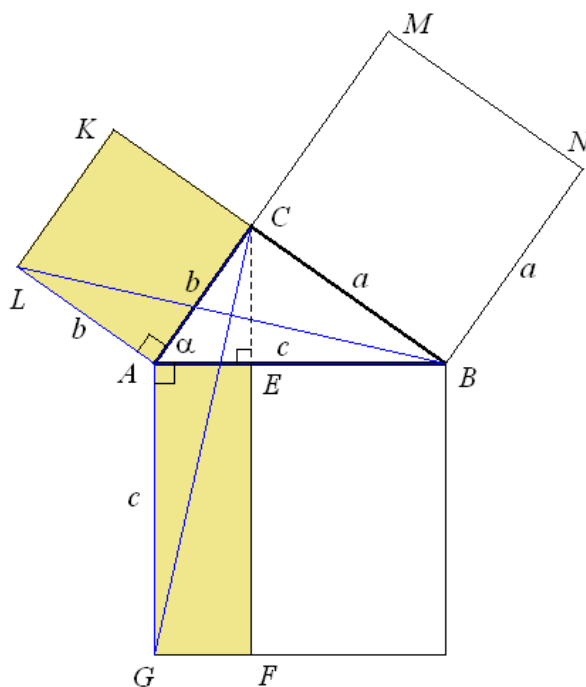
Při důkazu Euklides elegantně využil již dříve dokázaný poznatek:

Leží-li bod X na přímce CD a $ABCD$ je rovnoběžník, pak má trojúhelník ABE obsah roven polovině obsahu rovnoběžníka $ABCD$.



Ob
r. 3

(Viz obr. 3 - pravdivost tvrzení plyne ze vztahů pro obsahy obou obrazců.)



Obr. 4

Pythagorovu větu dokázal následovně:

Na obr. 4 jsou trojúhelníky LAB a CAG shodné podle věty sus, neboť

$$|AB| = |AG| = c, |AL| = |AC| = b \text{ (strany čtverců)} \text{ a } |\angle LAB| = |\angle BAG| = 90^\circ + \alpha.$$

(Dnes bychom to mohli zdůvodnit i využitím poznatku, že rotace je shodné zobrazení: Trojúhelník LAB je obrazem trojúhelníka CAG v otočení kolem bodu A o úhel α).

Vrchol B trojúhelníka LAB leží na přímce KC a čtverec $LACK$ je rovnoběžník. Podobně vrchol C trojúhelníka CAG leží na přímce EF a obdélník $AGFE$ je rovnoběžník. Podle předchozí věty tedy platí

$$S_{LACK} = 2S_{LAB} = 2S_{CAG} = S_{AGFE},$$

neboli

$$b^2 = c \cdot c_b, \text{ kde } c_b = |AE|. \quad (1)$$

Analogicky zjistíme

$$a^2 = c \cdot c_a, \text{ kde } c_a = |EB|. \quad (2)$$

Odtud

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Poznamenejme, že tvrzení vyjádřená vztahy (1) a (2) Euklides jako samostatné věty v Základech neuvádí. Dnes jim říkáme Euklidovy věty o odvěsň.

Podobně tzv. Euklidova věta o výšce se v Základech vyskytuje jen jako součást důkazu věty 14 z druhé knihy Základů, což byla konstrukce strany čtverce, který má stejný obsah jako daný obdélník s rozměry a, b (ukázali jsme v kap. *Řecká geometrická algebra*).

2. 20. věta 9. knihy: *Prvočísel je více, než jakékoli dané množství prvočísel.*

3. Euklidův algoritmus na hledání největšího společného dělitele D . Je výhodný pro hledání největšího společného dělitele velkých čísel. Vychází z poznatku, že když číslo d dělí součet $a + b$ a navíc d dělí a , pak také d dělí b .

Máme například najít $D(4292, 3944)$. Větší z čísel napíšeme ve tvaru součtu menšího a sčítance $b = 4292 - 3944$: $4292 = 3944 + 348$, pak

$$D = D(4292, 3944) = D(3944, 348).$$

Analogicky postupujeme dále, postup urychlíme, když za a zvolíme vhodný násobek menšího z čísel 3944 a 348: $3944 = 11 \cdot 348 + 116$. Vidíme, že D dělí 3944 a dělí součin $11 \cdot 348$, tak musí dělit i číslo 116

$$D = D(348, 116).$$

Dále $348 = 116 \cdot 3 + 0$, odtud $D = D(116, 0) = 116$

4. 36. věta deváté knihy: *Pokud součet po sobě jdoucích druhých mocnin čísla 2 dává prvočíslo, pak součin poslední druhé mocniny v součtu a tohoto prvočísla je dokonalé číslo.*

Dokonalá čísla jsou ta, která jsou rovna součtu svých dělitelů. Například čísla 6 a 28:

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Z věty 36-IX například plyne:

$1 + 2 + 4 = 7$ je prvočíslo, proto číslo $7 \cdot 4 = 28$ je dokonalé číslo.

Bylo již známo, že $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Věta tedy tvrdí: *Pokud je $2^k - 1$ prvočíslo, pak součin $2^{k-1} (2^k - 1)$ je dokonalé číslo.*

Říká se, že Euklides svým žákům zadával úloh tří různých skupin obtížnosti.

Do první skupiny patřily konstrukční úlohy, druhou tvořily důkazy matematických vět a třetí, nejtěžší skupina se skládala z úloh, v nichž Euklides předvedl zdánlivě správné odvození věty, která byla zřejmě nepravdivá, a žák měl za úkol najít chybu.

Proslulé Euklidovy výroky.

Když se jeden žák Euklida zeptal, jaký bude mít užitek z toho, že se naučí geometrii, Euklides řekl: „Dejte někdo tomu člověku obolos⁶, ať má užitek z toho, že se učí.“

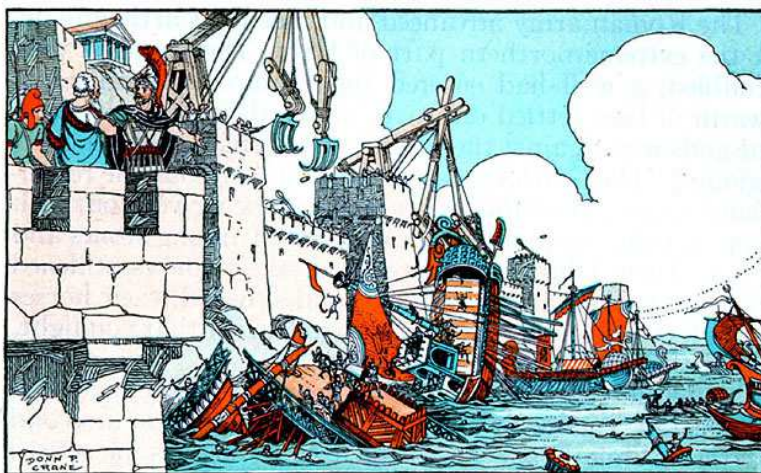
Egyptskému vládci Ptolemaiovi se zdálo být těžké zvládnout matematiku studiem Základů, tak se ptal, zda neexistuje nějaký snadnější způsob. Euklides odpověděl: „K matematice nevede královská cesta.“

Archimédes ze Syrakus (287 – 212 p.k.) bývá považován za nejvýznamnějšího vědce a starověku, proslul jako matematik, mechanik a astronom. Prý byl člověk „nizkého původu“ syn matematika a astronoma Feidia snad vzdáleně spřízněn s vládcem Syrakus Hieronem. Poznatky získal od otce, později studoval v Alexandrii a po návratu do Syrakus si dopisoval s Euklidovými žáky.

Pověsti a vynálezy. K usnadnění práce i pro vojenské účely Archimédes vynalézal stroje, které využívaly páky a kladky. Pomocí nich prý vyzdvihl na souš těžce naložený koráb „lehkým pohybem ruky“. Je znám jeho výrok „Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí“.

Za druhé Panské války (216 - 212 př. n. l.) dokázaly Syrakusy odolávat římským útokům téměř tři roky. Říká se, že to bylo právě díky Archimédovým válečným strojům. Pro ilustraci malý citát z Plutarchova popisu bitvy:

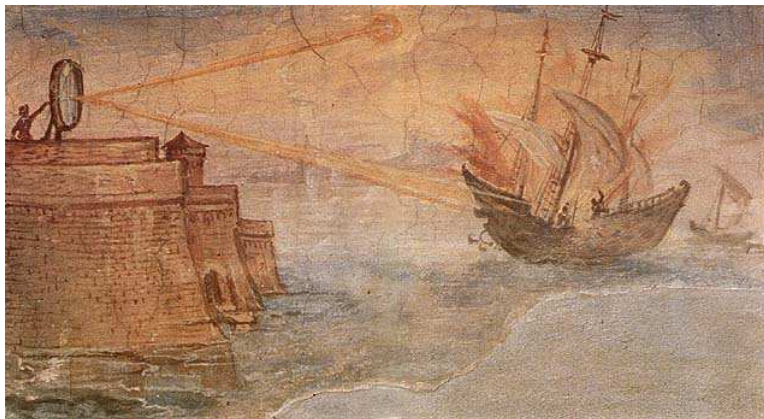
„ Když Římané zaútočili ze dvou stran, zavládly v Syrakusách zděšení a úzkostné ticho, protože se každý ve svém strachu domníval, že proti tak hrozně síle není možný odpor. Nyní spustil Archimédes svoje stroje. Na pozemní vojsko létaly střely různého druhu a obrovské kamenné bloky, které dopadaly s hlukem a neuvěřitelnou rychlostí, rozdrtily svou vahou všechny, kteří se nekryli, a způsobily zmatek v řadách vojska. Současně se z hradeb proti lodím vysoko vysunuly berany a silou obrovského tlaku shora je potápěly do hlubin nebo železnými chapadly či kleštěmi podobnými zabanům jeřábů uchopily loď, zvedly ji přídíl do výše, takže stála na zádi, a ponořily ji. Jinou loď obránci přitahovali lany a háky ke břehu a točili jí do kruhu, až narazila na skaliska pod hradbami, takže posádka lodi byla většinou zničena a zahynula. Často se stávalo, že některá loď byla úplně vyzdvížena z moře, točila se jako ve víru a vznášejíc se ve výši skýtala hrůznou podívanou; nakonec námořníci z lodi vypadli nebo byli vymrštěni a prázdná loď narazila na hradby, anebo



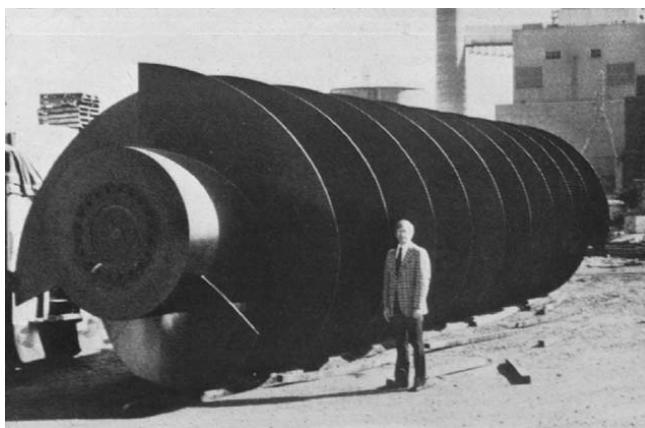
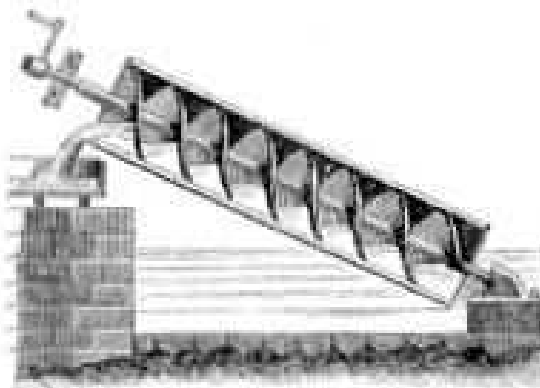
⁶ Obolos - tehdejší řecká mince.

když chapadlo povolilo, spadla do moře.“

Vedle těchto mechanických válečných strojů se traduje i zpráva o tom, že Archimédes zapaloval římské lodi soustředěním slunečních paprsků odrazem od vyleštěných štítů jako zrcadel na určité místo vysmolených dřevěných římských galér (obr. 2.10). I přesto, že tato zpráva nebyla zaznamenána životopiscem Plutarchem (máme jí od proslulého lékaře Galena až z poloviny druhého století), stala se tato historka trvalou součástí archimédovské tradice. Je málo pravděpodobné, že byly lodě zapalovány speciálně zkonstruovaným zrcadlem, jak bývá zobrazováno umělci. Podle některých hypotéz Archimedes spíše uspořádal řadu bojovníků tak, aby svými naleštěnými kovovými štíty vytvořili velké parabolické zrcadlo, které odráželo sluneční paprsky proti korábu. V roce 1973 nechal Ionnis Sakas postavit dřevěný model antické bojové lodi a pomocí 50 lesklých kovových štítů soustředil sluneční paprsky na model ve vzdálenosti 40 m. Loď tímto způsobem zapálil.

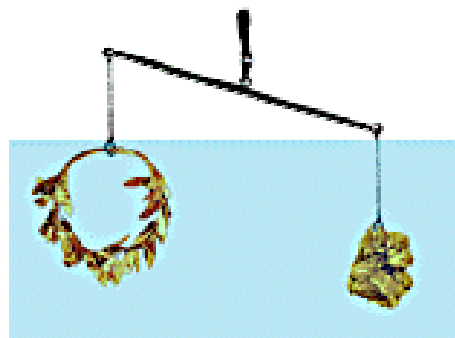
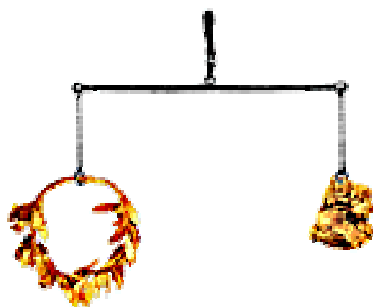


Archimédův šroub je další z jeho vynálezů. Dodnes se využívá jako čerpadlo.



Archimédův objev hydrostatického zákona. Král Syrakus, Hieron II, si nechal zhotovit zlatý vavřínový věnec. Měl podezření, že zlatník nepoužil všechno zlato, ale část ho nahradil stříbrem stejné váhy. Požádal proto Archimeda, aby zjistil, zda je věnec z ryzího zlata. Archimedes údajně našel řešení při koupeli ve vaně, když si uvědomil, jak určit vztlakovou sílu, kterou jsou do vody ponořená tělesa nadlehčována. Archimedes přitom zavedl nový, důležitý fyzikální pojem, hustotu tělesa.

Princip ověření pravosti věnce je zřejmý z následujícího obrázku: Když vyvážíme nepravý věnec zlatem, pak po ponoření do vody dojde k porušení rovnováhy. Objem zlata na pravém rameni vah je totiž menší, než objem věnce



vyrobeného ze slitiny o menší hustotě. Proto je věnec nadlehčován větší vztlakovou silou.

Dochovalé spisy jsou jen vědecké práce a dopisy. Popisem svých vynálezů se Archimédes nezabýval. (Aplikacemi vědy pravděpodobně pohrdal.)

- 1) O rovnováze ploch I, II
- 2) Kvadratura paraboly
- 3) Poselství Eratostenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh (palimpsest)
- 4) O kouli a válci I, II
- 5) O spirálách
- 6) O konoidech a sféroidech
- 7) O plovoucích tělesech I, II
- 8) Měření kruhu
- 9) O počítání písku

Těžiště je pojem který pochází od Archiméda. Definuje těžiště tělesa jako působíště jeho tíhové síly a přenáší jej i do geometrie: Těžiště geometrického útvaru chápe jako působíště tíhy jeho modelu vyrobeného z homogenního materiálu. Například kruh si představujeme jako kruh vyřezaný z velmi tenké destičky, která má všude stejnou hustotu i tloušťku, bod jako kuličku s velmi malým průměrem nebo jako kvádr zanedbatelných rozměrů apod.

Archimedova mechanická metoda (metoda hmotných bodů) spočívala na fyzikálních úvahách s takovými fyzikálními modely geometrických útvarů. Byla to účinná metoda objevování nových poznatků, která vycházela nepřesných představ. (Kruh ve skutečnosti není destička, bod nemá rozměry atd.) Archimédes proto *tuto metodu užíval pouze k objevování poznatků*. Ve svých pracích pak poznatek napřed uvedl a pak dokázal přesnými matematickými postupy. Důkazy často prováděl tzv. exhaustivní (tzn. vyčerpávající) metodou založenou na limitních úvahách. Těmto důkazům se nedalo nic vytknout, avšak čtenář z nich nezjistil, jakou Archimédes poznatek objevil.

Archimédes popsal svou metodu hmotných bodů v dopise alexandrijskému knihovníkovi Eratostenovi. Dopis byl objeven až na počátku dvacátého století. **Poselství Eratostenovi o**

mechanické metodě řešení geometrických úloh byl totiž palimpsest⁷ - . pergamen, který byl po oškrabání znovu použit.

Kolem roku 1000 byl původní opis Archimédova díla O metodě (Efodos) použit jako pergamen k zapsání biblického textu. Roku 1906 jej objevil v Istarském kostele dánský lingvista J.L.Heiberg a podrobně jej prozkoumal. Část textu přečetl a opsal. Pak se rukopis za války Řeků s Turky ztratil, a objevil se až v roce 1929 v rukou jedné francouzské rodiny. Roku 1998 byl vydražen (2 miliony dolarů) a nový majitel jej zapůjčil k prozkoumání do Waltersova muzea umění v Baltimoru (Maryland). Podrobněji viz <http://www.archimedespalimpsest.org/>

V úvodu Rozpravy o metodě Archimédes píše:

„Pocítil jsem nutnost napsat Ti a v téhle knize vyložit jednu zvláštní metodu, pomocí níž získáš možnost nalézat některé matematické věty pomocí mechaniky. Věřím, že Ti tato metoda bude neméně užitečná i k důkazům samotných vět. Skutečně, cokoliv jsem dříve nahlédl pomocí mechaniky, později jsem dokázal i geometricky, protože to, co se nahlédne touto metodou, není ještě důkaz. Nicméně je mnohem snazší získat pomocí ní jakousi představu o zkoumané věci a pak najít i důkaz než když se zkoumá a nic se neví. ... proto jsem se rozhodl napsat o této metodě a zveřejnit ji, jednak proto, aby mé dřívější odkazy na ni nezůstávaly prázdnými slovy, jednak proto, že může přinést matematice nemalý užitek; předpokládám, že někteří současní nebo budoucí matematici budou umět předvedenou metodou nalézt i jiné věty, které nám ještě nepřišly na mysl.“

Mechanická metoda vychází z empirických fyzikálních poznatků, zejména z těchto:

I. Každá hmotná soustava má právě jedno těžiště.

II. (Zákon páky) Těžiště dvojice hmotných bodů A, B o hmotnostech m_1, m_2 je takový bod T

úsečky AB, pro který platí $m_1 \cdot |AT| = m_2 \cdot |BT|$ (obr. 6).



Obr. 6

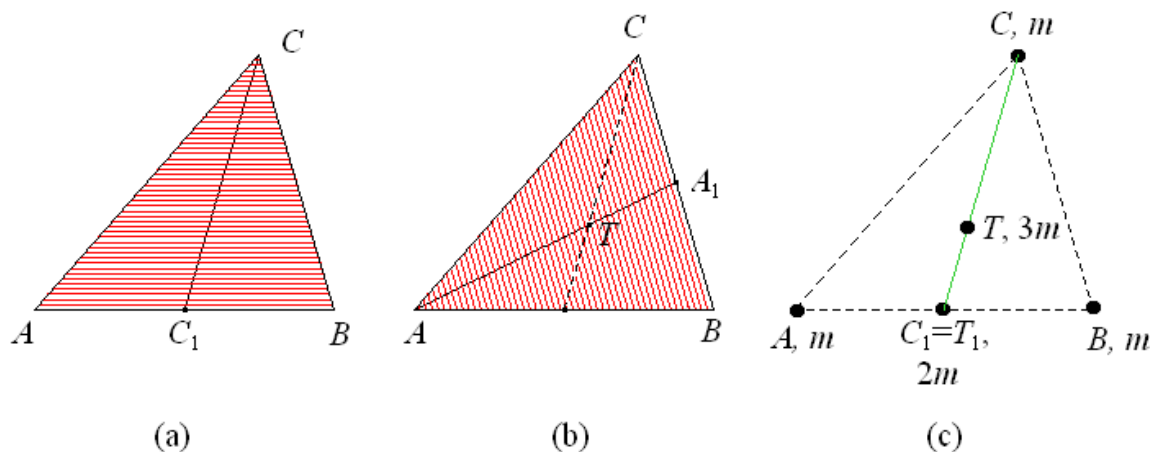
III. (Princip redukce) Těžiště hmotné soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její část (tzv. podstoustavu) jedním hmotným bodem splývajícím s těžištěm této podstoustavy a majícím celou její hmotnost.

IV. Těžiště úsečky je v jejím středu.

Podstatu Archimédovy mechanické metody ukážeme na třech příkladech. V následujícím textu si místo matematických úseček, bodů i jiných geometrických útvarů často představujeme jejich fyzikální modely, i když pro stručnost užíváme termíny úsečka, bod apod. Fyzikální modely úseček mají nenulovou tloušťku a hmotnost, modely rovinných útvarů jsou planoparalelní destičky s velmi malou (avšak nenulovou) tloušťkou apod. Po rozřezání útvaru na úsečky můžeme úsečky přemístit a opět z nich složit původní útvar. Podobné operace provádíme i s rovinnými útvary (přesněji tenkými destičkami), na něž jsme rozřezali soustavou navzájem rovnoběžných rovin těleso. To je však z hlediska matematiky nepřesný, resp. nekorektní postup. Právě kvůli těmto problémům Archimédes pravděpodobně váhal se zveřejněním mechanické metody.

⁷ Z řeckého oškrabati.

1. Těžiště trojúhelníka. Představme si trojúhelník ABC jako množinu úseček rovnoběžných se stranou AB , obr. 7 (a). Každou úsečku lze nahradit hmotným bodem umístěným v jejím těžišti, které se nachází ve středu úsečky. Všechny takové hmotné body pokrývají úsečku C_1C , kde C_1 je střed strany AB . Těžiště T trojúhelníka je podle principu redukce totožné s těžištěm soustavy těchto hmotných bodů, a tak leží na úsečce C_1C .



Obr. 7

Analogicky dokážeme, že těžiště leží na úsečce A_1A , kde A_1 je střed strany BC - obr. 7 (b) - resp. že těžiště leží na úsečce B_1B , kde B_1 je střed strany CA . Protože trojúhelník má právě jedno těžiště, protínají se úsečky A_1A , B_1B a C_1C v jediném bodě T .

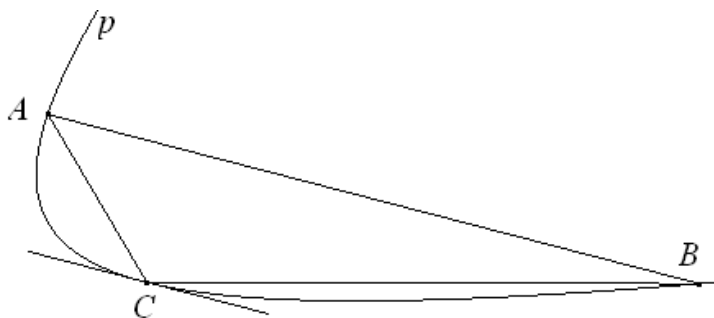
Dále ukážeme, že soustava tří hmotných bodů A , B , a C , které se nacházejí ve vrcholech trojúhelníka a mají stejnou hmotnost m - obr. 7 (c) - má těžiště ve stejném bodě, jako původní trojúhelník. Těžiště této soustavy můžeme nalézt tak, že hmotné body (A, m) a (B, m) nahradíme jejich těžištěm $(T_1, 2m)$, které však leží ve středu C_1 úsečky AB . Těžiště T soustavy všech tří bodů A , B , C leží na úsečce C_1C , neboť je (podle principu redukce) těžištěm bodů $(T_1, 2m)$ a (C, m) . Cyklickou záměnou bodů A , B , C v poslední úvaze zjistíme, že bod T leží také na úsečkách A_1A a B_1B , tedy v těžišti trojúhelníka ABC . Navíc pomocí pravidla páky pro body $(C_1, 2m)$ a (C, m) dostáváme $2m \cdot |C_1T| = m \cdot |CT|$, neboli $2|C_1T| = |CT|$.

Závěr: Nechť ABC je trojúhelník a A_1, B_1, C_1 jsou po řadě středy stran BC , CA , AB . Úsečky A_1A, B_1B a C_1C , zvané těžnice trojúhelníku ABC , se protínají v jediném bodě T , těžišti trojúhelníka, přičemž platí $|AT| : |TA_1| = |BT| : |TB_1| = |CT| : |TC_1| = 2 : 1$.

2. Kvadratura paraboly.

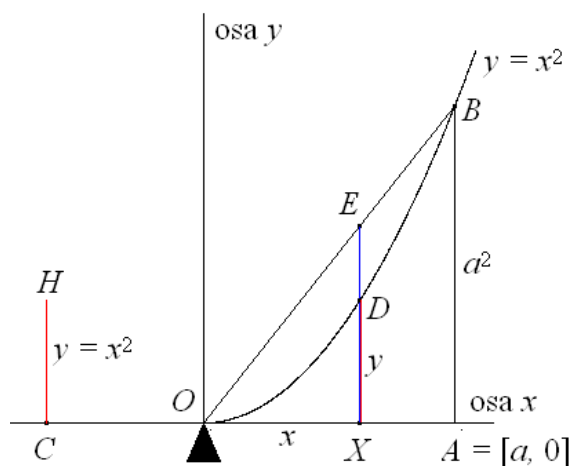
Archimédes mechanickou metodou zjistil a exhaustivní metodou přesně dokázal větu:

Každá úseč sevřená parabolou p a její tětivou AB má obsah rovný $4/3$ obsahu trojúhelníka ABC , kde C je bod dotyku paraboly s její tečnou rovnoběžnou s přímkou AB .

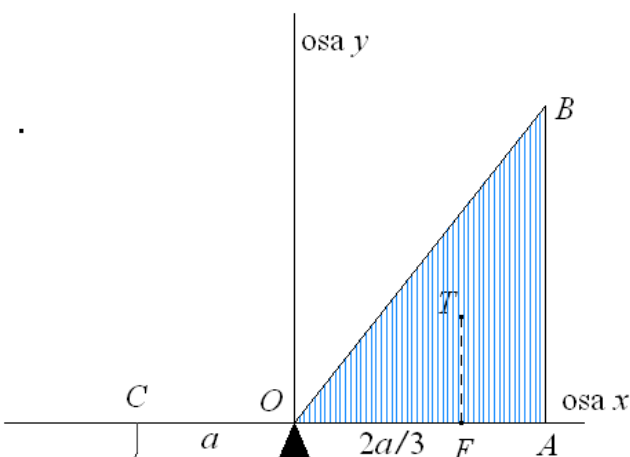


Obr. 8

Archimédovo odvození věty je poměrně náročné. Ukážeme proto hlavní myšlenku na jednodušší úloze. Mechanickou metodou nalezneme obsah obrazce OAB pod grafem paraboly $y = x^2$ (obr. 9).



Obr. 9



Obr. 10

K obrazci OAB , který nazveme U přidejme trojúhelník ABC a označme jej V . Rovnoběžka s osou y v libovolném bodě $X = [x, 0]$ úsečky OA vytne na útvaru U úsečku DX délky $y = x^2$ a na trojúhelníku V úsečku EX , jejíž délku určíme z podobnosti trojúhelníků OXE a OAB :

$$\frac{|EX|}{|AB|} = \frac{|OX|}{|OA|}, \text{ neboli } \frac{|EX|}{a^2} = \frac{x}{a}. \text{ Odtud } |EX| = ax.$$

Dále považujeme osu x za páku podepřenou v bodě O , který je jejím těžištěm. Na této páce ponechme pouze (hmotné) úsečky EX a DX , přičemž úsečku DX posuneme do takové polohy CH , aby byla s úsečkou EX (ponechanou na svém místě) vyvážená. Protože délky úseček jsou úměrné jejich hmotnostem, má zákon páky (při označení podle obr. 9) tvar

$x^2 \cdot |OC| = ax \cdot x$. Odtud $|OC| = a$. Vidíme, že poloha bodu C nezávisí na volbě bodu X , a tak se rovnováha na páce neporuší, když všechny úsečky DX přemístíme do bodu C , kde je složíme opět v útvar U , který v bodě C zavěšíme podle obr. 10. (Trojúhelník OAB zůstane na místě.) Hmotnosti desek - obrazců jsou úměrné jejich obsahům, $|OF| = \frac{2}{3}a$ a

$S_{ABC} = \frac{1}{2}a^3$. Vztahy dosadíme do podmínky rovnováhy $S_U \cdot |OC| = S_{ABC} \cdot |OF|$ pro situaci na obr. 10 a z ní pak určíme $S_U = \frac{1}{3}a^3$. Správnost výsledku lze ověřit integrálem:

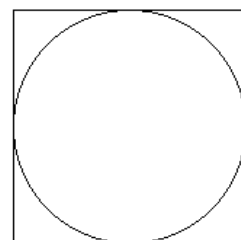
$$S_U = \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3.$$

Shrnutí. Necht' je dán útvar U , jehož obsah S neumíme nalézt standartním postupem. Podstatou hledání obsahu S Archimédovou mechanickou metodou je umístit útvar U na totéž rameno páky (reprezentované úsečkou, jež je podepřena v bodě O) spolu s vhodně zvoleným útvarem V známého obsahu S_V tak, aby bylo možné po rozřezání obou útvarů na úsečky (přesněji velmi tenké proužky ohraničené navzájem rovnoběžnými přímkami a hranicí útvaru) kolmé k ramenu páky a pak přemístit úsečky útvaru U na druhé rameno páky do místa C tak, aby vyvažovaly útvar U a přitom měly všechny stejnou vzdálenost c od osy otáčení. Pak lze obsah S určit z podmínky rovnováhy $S \cdot |OC| = S_V \cdot |OF|$, kde F je kolmý průmět těžiště útvaru V na rameno páky.

Poznamenejme, že podstatnou a nejtěžší částí postupu je nalezení vhodného útvaru V a jeho polohy tak, aby se jeho úsečky po přemístění vyvažovaly s příslušnými úsečkami útvaru U .

3. Výpočet objemu koule

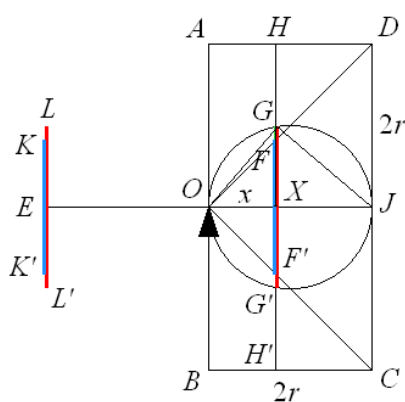
Pomocí své mechanické metody určil Archimédes jako první objem koule. Tohoto poznatku si velmi cenil, protože si přál (jak uvádí Plutarchos), aby byl na jeho náhrobku vytesán obrazec, který znázorňuje válec s vepsanou koulí. Poměr objemů i povrchů těchto dvou těles je totiž 3:2 (přesvědčte se a dejte do souvislosti s pythagorejskou mystikou). Ve svazcích O koule a válci dokazuje řadu vztahů pro objemy a povrchy Válců, kužele, koule a jejich částí opět přesnou, exhaustivní metodou. Cestu k nalezení vztahu pro objem koule odhaluje až ve zmíněném Palimpsestu.



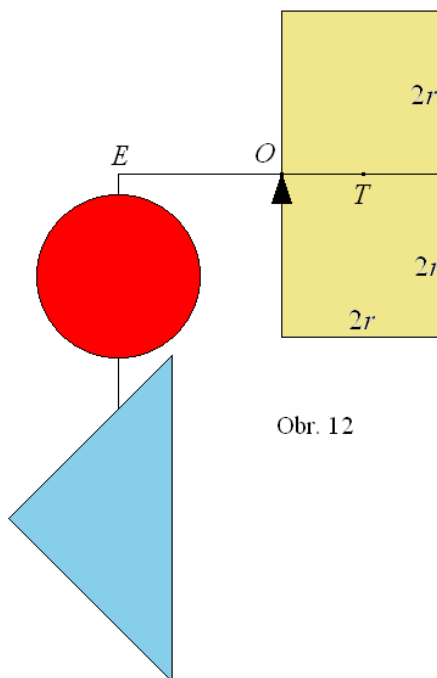
Kouli o poloměru r s válcem a kuželem, které mají výšku r a poloměr podstavy $2r$, umístíme do sebe podle obr. 11 (obrázek představuje osový řez tělesy). Jejich společná osa

OJ představuje páku, která je podepřená v bodě O . Tělesa rozřežeme na tenké plátky („kruhy“) rovinami kolmými na osu OJ . Na ose zvolíme bod X ve vzdálenosti x od O . Ta ze soustavy rovin, která jím prochází, vytíná na tělesech kruhy s poloměry $|FX| = x$ (neboť trojúhelník OXF je rovnoramenný, uvědomte si, že $AOJD$ je čtverec), $|GX| = \sqrt{x(2r-x)}$ (jak plyne z Euklidovy věty o výšce pro trojúhelník OJG) a $|HX| = 2r$. Ptáme se, do jaké vzdálenosti od bodu O je nutno posunout na opačné rameno páky dva menší z těchto kruhů, aby byly v rovnováze z kruhem největším. Označme KK' a LL' polohy kruhů FF' a GG' po přemístění, bod E je jejich společný střed. Hmotnosti všech tří kruhů jsou úměrné jejich obsahům. Podmínka rovnováhy má tedy tvar

$$(\pi x^2 + \pi x(2r-x)) \cdot |OE| = (\pi(2r)^2) \cdot |OX|.$$



Obr. 11



Obr. 12

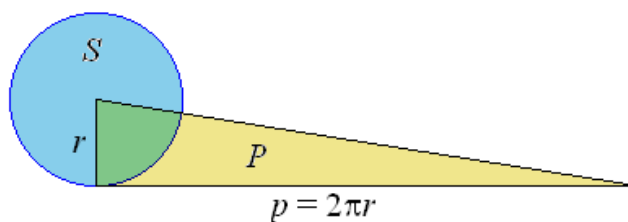
Po dosazení $|OX| = x$ a běžných úpravách určíme $|OE| = 2r$. Vzdálenost OE tedy nezávisí na poloze bodu X . Můžeme tedy všechny plátky, na něž jsou koule i kužel rozřezány soustavou rovin, přemístit, složit z nich opět kužel i kouli a zavěsit je na páku do bodu E , aniž by se porušila rovnováha (obr. 12). Hmotnosti těles jsou úměrné jejich objemům. Proto má podmínka rovnováhy na páce po přemístění těles tvar $(V + V_k) \cdot |OE| = V_v \cdot |OT|$, kde V je objem koule, $V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi(2r)^2 \cdot 2r$ objem kužele, $V_v = \pi(2r)^2 \cdot 2r$ objem válce a $|OT| = r$ vzdálenost jeho těžiště od bodu O . Určíme tedy

$$V = \frac{r}{2r} \cdot 8\pi r^3 - \frac{1}{3} 8\pi r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

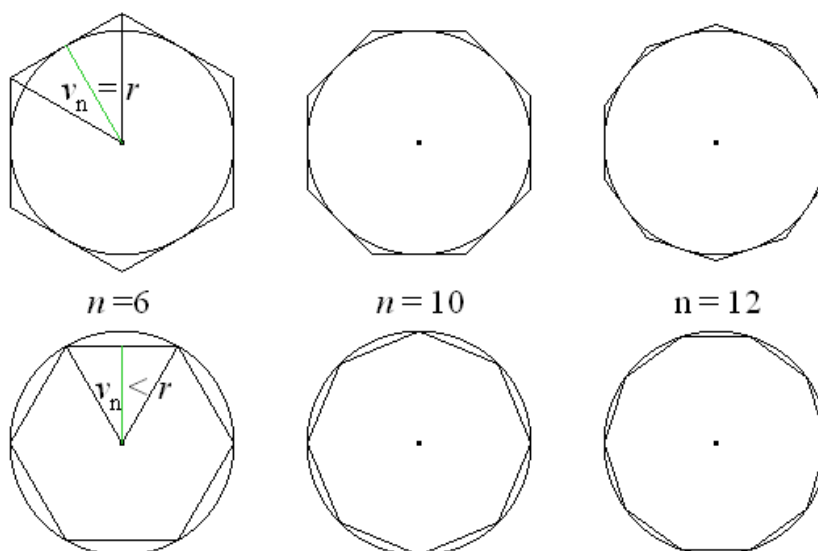
nebo, jak by řekl Archimédes, objem koule je roven dvěma třetinám objemu kouli opsaného válce.

Postup důkazu exhaustivní metodou ukážeme v důkazu následující věty:

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka, jehož délky odvěsen jsou rovny poloměru a obvodu kruhu.



Obr. 13

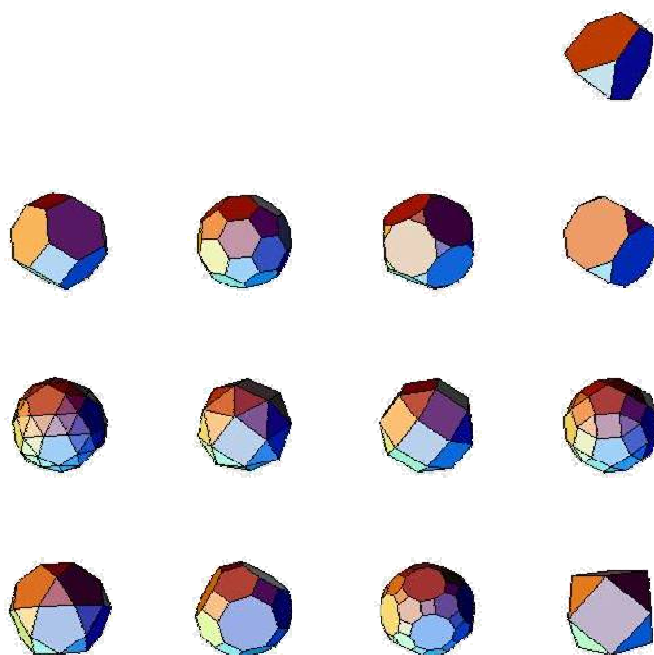


Obr. 14

Náznak důkazu exhaustivní metodou. Ve shodě s obrázkem 13 označíme obsah kruhu S a obsah trojúhelníka $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, kde p je obvod kruhu. Máme dokázat, že $S = P$. Kdyby bylo $S < P$, můžeme opisovat kruhu n -úhelníky, jak je naznačeno v horní řadě na obr. 14. Pomocí obrázku zjistíme, že opsaný n -úhelník má obsah $S_n > S$ a zároveň $S_n > P$, neboť $S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot r$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$ a $p_n > p$. S rostoucím n se však S_n neomezeně přibližuje k hodnotě S . Pro dostatečně velké n tedy bude $S < S_n < P$, což je spor s tím, že $S_n > P$. Kdyby naopak bylo $S > P$, můžeme kruhu n -úhelníky vepisovat, jak je naznačeno v dolní řadě na obr. 14. Vidíme, že vepsaný n -úhelník má obsah $S_n < S$ a zároveň $S_n < P$, neboť $S_n = \frac{1}{2} p_n \cdot v_n$, $S = \frac{1}{2} p \cdot r$, $p_n < p$ a $v_n < r$. S rostoucím n se však S_n neomezeně přibližuje k hodnotě P . Pro dostatečně velké n tedy bude $P < S_n < S$, což je spor s tím, že $S_n < P$.
Závěr: S není menší než P , ani není větší než P . Je tedy $S = P$.

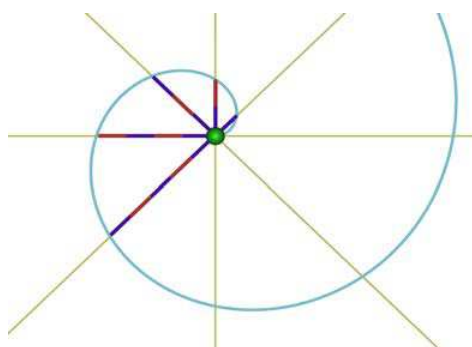
Pappovou zásluhou se uchovalo svědectví o Archimédově objevu polopravidelných mnohostěnů, tj. takových vypuklých mnohostěnů, jejichž všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky více než jednoho druhu, ale všechny úhly stěn jsou vzájemně shodné nebo jsou symetrické podle středu mnohostěnu. Archimédes našel 13 takových těles ohraničených 8, 14, 26, 32, 38, 62 nebo 92 stěnami ve tvaru trojúhelníků, čtverců, pětiúhelníků, šestiúhelníků, osmiúhelníků nebo 12-ti úhelníků.

Archimédes je získal z pěti Platónských těles. Sedm Archimédových těles vzniklo rovinným odseknutím vrcholů, čtyři odseknutím hran a dva se získají složitým způsobem.



Archimédova spirála

Je to čára opisovaná bodem rovnoměrně se pohybujícím po polopřímce, zatímco se tato polopřímka rovnoměrně otáčí v rovině kolem svého počátku.

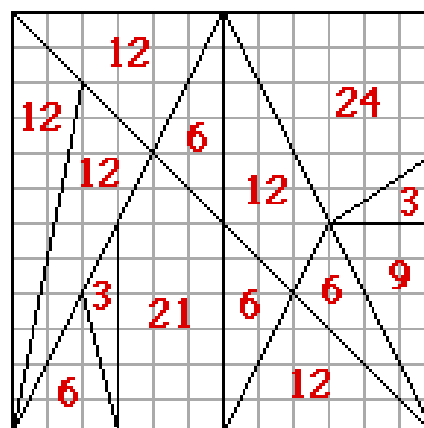
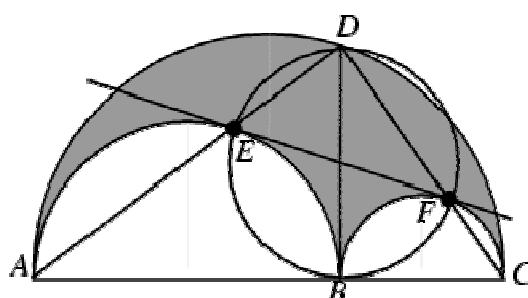


Arbelos (obuvnický nůž)



Archimédes dokázal, že obsah obuvnického nože narysovaného na obrázku je

roven obsahu kruhu nad průměrem BD . Dokažte to také!

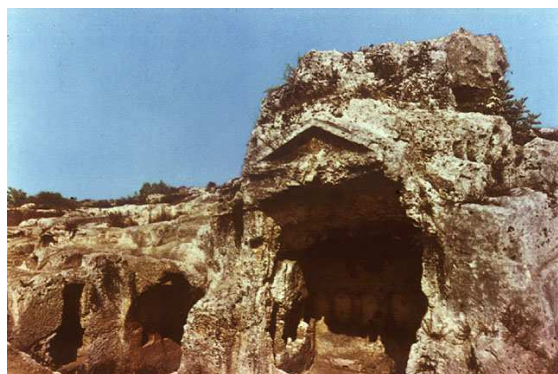
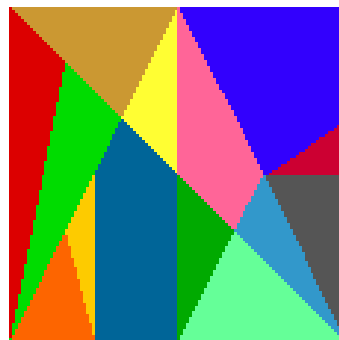
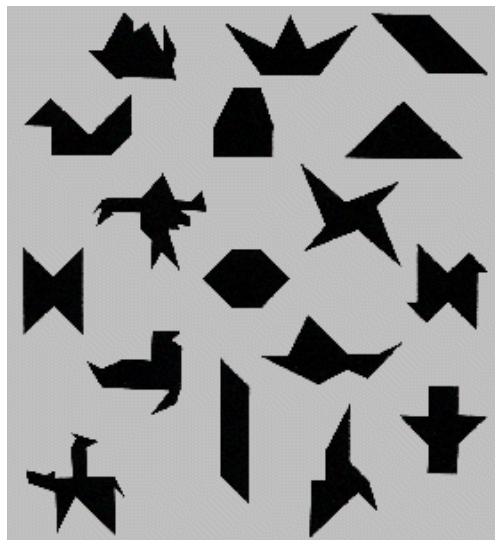


Stomachion (kratochvíle)

O tomto hlavolamu referuje Magnus Ausonius (310 – 395 n.l.) a nazývá jej Archimédova krabička. V listopadu 2003 nalézá Bill Cutler na počítači všech 536 možností

jak sestavit čtverec ze všech 14 dílků. Přitom jsou už vyloučena řešení vznikající rotacemi a zrcadlením.

Dr. Netz ze Stafordu po prozkoumání Palimpsestu našel v něm i Stomachion. Dr. Netz se domnívá, že zde Archimedes v tomto díle zjišťuje počet konfigurací, kterými lze ze 14 dílků hlavolamu sestavit čtverec. Bylo by to první kombinatorické dílo v dějinách matematiky.



Údajný Archimédův hrob



Archimédes byl zabit při dobývání Syrakus. Říká se, že jeho poslední věta byla: „Neruš mi mé kruhy.“

Appollonios z Pergy (262? – 200? př. n. l.) byl třetí největší matematik Helénistického období. Žil převážně v Alexandrii, kde se učil od Euklidových nástupců.

Sepsal osmisvazkové dílo **Kuželosečky** (zachovalo se prvních 7 knih)

V první knize definuje kuželosečky jako řezy kuželové plochy s rovinou (kužel může být i šikmý). Dále zavádí vztahy mezi průměrem kuželosečky a sdruženými tětivami, které v dnešní terminologii vedou k rovnicím kuželoseček v kosoúhlých souřadnicích.

Druhá kniha zavádí asymptoty hyperboly a některé další vlastnosti hyperbol, dále se zabývá vlastnostmi a konstrukcemi tečen ke kuželosečkám.

Třetí kniha obsahuje věty o obsazích útvarů ohraničených tečnami a sečnami kuželosečky, polární vlastnosti kuželoseček. Dále zde zavádí ohniska elipsy a hyperboly a zkoumá jejich vlastnosti.

Čtvrtá kniha, v níž se studují vzájemné polohy kuželoseček, uzavírá snadnější část celého díla.

Od 5. knihy náročnější způsob výkladu, zkoumá normály z různých bodů jako přímký extrémálních délek, dopracovává se ke středům křivosti.

Apolloniovy věty. Součet čtverců sdružených průměrů je konstantní. Plocha rovnoběžníku se sdružených průměrů je konstantní.

Prvních 7 knih obsahuje 387 vět. Dopracoval se k metodám, které vedly k dnešní analytické geometrii.

Další díla známe jen podle názvů a z toho, co o nich napsal Pappos.

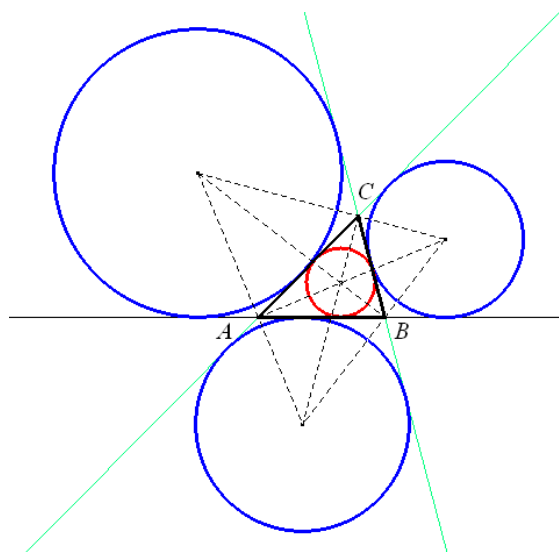
Apolloniova úloha: Máme množinu bodů, přímek a kružnic. Vybereme z ní tři prvky a máme sestavit všechny kružnice, které se těchto prvků dotýkají (je-li některým prvkem bod, pak to znamená, že hledaná kružnice tímto bodem prochází).

Podle volby prvků máme vlastně celkem 10 Apolloniových úloh. Můžeme je znázornit schématem, které uvádí trojice zadaných prvků (B značí bod, P přímkou a K kružnici):

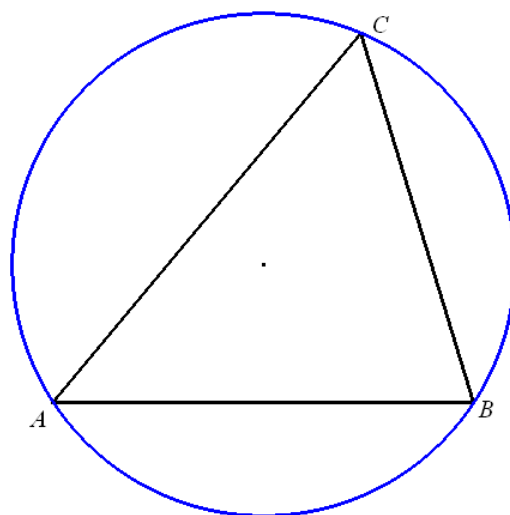
- | | |
|--------|---------|
| 1. BBB | 6. BKK |
| 2. BBP | 7. PPP |
| 3. BBK | 8. PPK |
| 4. BPP | 9. PKK |
| 5. BPK | 10. KKK |

Na základní školy se řeší úloha 1 (BBB), v níž se má vlastně sestavit kružnice opsaná trojúhelníku s vrcholy v daných bodech. Její střed je průsečík os stran trojúhelníka. (Na obr. 2 máme řešení pro trojúhelník ABC .) Rovněž je jednoduchá úloha 7 (PPP), která má čtyři řešení, když se přímký protínají v bodech A, B, C (obr. 1). Střed kružnic leží na osách úhlů přímek. Červená kružnice na obrázku se nazývá kružnice vepsaná trojúhelníku ABC , modré jsou kružnice trojúhelníku ABC připsané při stranách AB, BC a AC .

Jestliže jsou dvě přímký v úloze PPP rovnoběžné a třetí je protíná, má úloha jen dvě řešení. Promyslete konstrukci.

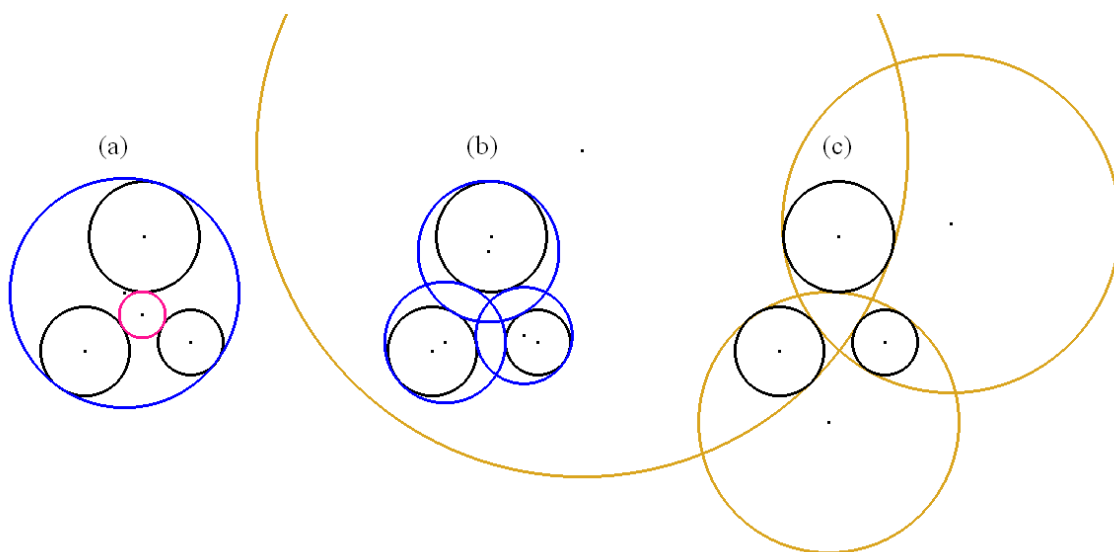


Obr. 1: PPP



Obr. 2: BBB

Obecná úloha KKK může mít až 8 řešení, jak ukazuje následující obrázek, který je kvůli přehlednosti rozkreslen do tří dílčích obrázků. Na každém z nich jsou černou barvou vyznačeny tři zadané kružnice. Dílčí obrázek (a) znázorňuje dvě řešení, sice červenou kružnici, která má s každou z daných kružnic vnější dotyk, a modrou, která má s každou z daných kružnic vnitřní dotyk. Na obrázku (b) vidíme tři další řešení. Jsou to kružnice modré barvy a každá z nich má s jednou z daných kružnic vnitřní dotyk a se zbývajícimi dvěma vnější dotyk. Obrázek (c) představují kružnice hnědé barvy poslední tři možná řešení. Každá z nich má se dvěma danými kružnicemi vnitřní dotyk a se třetí danou kružnicí vnější dotyk. Počet řešení úlohy KKK závisí na vzájemné poloze zadanych kružnic.



Apolloniova kružnice: $k = \{x; |AX| : |BX| = h, h > 0 \wedge h \neq 1\}.$

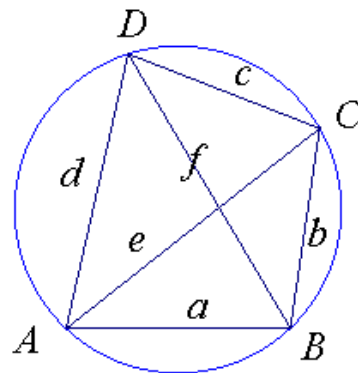
Antická matematika v období římské nadvlády

Alexandrie zůstává střediskem starověké matematiky. Ve větší formě se objevují kompilace a komentáře klasických děl. (Díky nim se dochovaly mnohé výsledky starověkých učenců.)

Nikomachmos z Gerasy (~ 100 n. l.): Úvod do aritmetiky
(nejvýznamnější výklad pythagorejské aritmetiky – figurální čísla)

Klaudios Ptolemaios (~ 150 n. l.): astronom a matematik
Velká sbírka (Almagest) – obsáhlé astronomické dílo
matematický popis Hipparchovy geocentrické soustavy ze 2. stol. př.n.l.

Ptolemaiova věta pro tětíkový čtyřúhelník: $ac + bd = ef$
Použil ji k výpočtu tabulek délek tětíků příslušných
obvodovým úhlům v jednotkové kružnici. Odpovídá to
tabulkám funkce sinus.



Planisphaerum – dílo o stereografické projekci.
Stereografická projekce byla mimo jiné podkladem pro
konstrukci astrolábu.

Geographia – Základy obecného zeměpisu. Určování polohy míst na Zemi pomocí šířky a
délky zemské sféry.

Ptolemaiovo dílo mělo po mnoho staletí pro astronomy a geography asi tak velký význam,
jako Euklidovy Základy pro matematiky.

Heron (1. stol. n. l.) všestranně nadaný učenec, vynálezce, matematik a astronom.

Matematika: Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku ABC má tvar
 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde s je polovina obvodu:
 $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Určil objemy pravidelných mnohostěnů.

Astronomie: Předpověděl zatmění Slunce r. 62.

V díle Pneumatika popisuje řadu vynálezů, nevíme však,
zda všechny pocházejí od něj. Využíval páru k pohonu
strojů. Na obrázku vidíme Heronovu baňku, jejíž modely
se při výuce fyziky využívají k demonstraci principu
reaktivního pohonu.



Diofantos (~ 250 n. l.) obsáhlé dílo Aritmetika. Z originálu se zachovalo 6 knih, prý byly
nedávno nalezeny dvě další.

Tato sbírka problémů je velmi různorodá a řešení jsou často velmi vynalézavá. Poprvé
systematicky využívá algebraické symboly (zvláštní znak pro neznámou, pro „minus“ a pro
převrácenou hodnotu), Řeší různé typy neurčitých rovnic (i vyšších stupňů), hledá vždy
kladné racionální kořeny.

Pappos alexandrijský (3. století) dílo *Synagoge* (Sbírka) je příručkou ke studiu klasických řeckých matem. děl. Je zde mnoho historických poznámek, vylepšení některých důkazů, obměny a zobecnění některých vět. Mnohé výsledky starověkých učenců známe jen z této knihy, například Archimédova poloprávdelná tělesa.

Hypatie napsala rovněž komentáře ke klasickým řeckým matem. dílům. Byla zavražděna r. 415 stoupenci sv. Cyrila.

Orient po úpadku řecké společnosti

Indie

Siddhántás - první dochované, převážně astronomické dílo. Mnoho poznatků pravděpodobně převzatých z Řecka a Babylonu. Šedesátinné zlomky, tabulky sinů (jyá).

Matematici a astronomové

Árjabhata (476-550), dílo *Árjabhattíja* (499)

Aproximace $\pi = 62832/2000 = 3,1416$, tabulky sinů a kosinů, řešení diofantovských rovnic. Heliocentrický model sluneční soustavy, planety obíhají po elipsách.

Brahmagupta (598-668): Používal nulu, částečně i záporná čísla. První obecná celočíselná řešení rovnic $ax - by = c$. Těťivové čtyřúhelníky: B. vzorec a B. věta. B. identita. Napsal astronomické dílo *Siddhantha*, kde se poprvé setkáváme se znaky 1, 2, ... 9. Heliocentrický názor, popisuje gravitaci.

Bhaskara II (1114-1185) Vedl observatoř v Ujjainu. Nejznámější dílo je třináctisvazková *Lílavátí*. Rozšířil Brahmaguptovy práce na číselném systému, vyřešil mnoho typů diofantovských rovnic, geometrie, trigonometrie, sférická trigonometrie. úvahy blízké dif. a integrál. počtu.

Arabský svět

Kulturní úroveň Arabů byla původně nízká, na dobytých územích se setkávali s vyšší kulturou, brzy si toto kulturní bohatství osvojili a vytvořili vlastní, osobitou kulturu.

Po celém území vznikla řada vědeckých center, např. *Damašek*, *Bagdád*, *Buchara*, *Samarkand*, na Pyrenejském ostrově pak *Córdoba*, *Sevilla*, *Granada*.

Význam arabské matematiky:

1. Pečlivě **přeložili klasická řecká díla**. Některá z nich jsou dnes známa jen z těchto překladů. Učinili řeckou matematiku srozumitelnější tím, že ji prostudovali a komentovali a rozpracovali.
2. Jejich zásluhou se v Evropě a později po celém světě rozšířilo **užívání symbolů 1, 2, ... 9 a poziční soustavy**.
3. Algebraizovali matematiku, zavedli **systém a moderní metody do řešení rovnic**: užívali slovní označení pro neznámou a počítali s ní tak, jako by to bylo (známé) číslo; úpravami sestavené rovnice pak našli hodnotu neznámé. Vše ovšem popisovali slovně – označení proměnných pomocí písmen bylo zpracováno až v 17. stol.
4. Kladli důraz na **aplikace matematiky**. Rozvinuli numerické výpočty, trigonometrii.

Bagdád (Město míru, zal. ~770) – kalif *Hárún ar-Rašíd* (~800) zde založil knihovnu, jeho syn *al-Mamún* rozšířil na *Dům moudrosti* – vědecký ústav s observatoří a knihovnou - obdobu alexandrijského *Múseiónu*. Velký sbor učenců překládal do arabštiny vědecká díla dovážená ze všech zemí. (Po vítězství nad Byzancí vyměnil al-Mamún 1000 křesťanských zajatců za knihy).

al-Džafar Mohamed ibn Músa al-Chorézmi (~780-~850) –nejvýznamnější bagdádský matematik.

1. **Kniha o sčítání a odečítání podle indického počtu**: „Rozhodli jsme se ukázat indický počet, užívající devíti znaků, kterými lze jednoduše a krátce vyjádřit každé jejich číslo ...“
2. **Kitáb al-much-tasav al-džabr wal-mukabala** (Pojednání o napravovacím a konfrontačním výpočtu). Zde se poprvé objevuje termín *rovnice* a je popsán způsob, jak rovnice sestavovat a jak je řešit. Zkomolením slova *al-džabr* (napravování, spravení zlomené věci) vznikl termín algebra.

Omar al-Chajjám (1048-1131) perský astronom, matematik, filozof a básník.

Jako jinoch byl poslán k slavnému učiteli imámu Movafrakovi v Níšápúru, o němž šla pověst, že kdo s ním četl korán, dojde v životě štěstí. U něho se setkal se spolužákem Nizámu-l-mulkem a Hasanem ihn Sabbáh, se kterými se spřátelil do té míry, že v mladické horlivosti si slíbili podělit se o své štěstí v budoucnosti.

Když se pak Nizámu-l-mulk stal vezírem sultána Alp-Arslana (1063-1073), pomohl Hasanovi k hodnosti dvorního tajemníka. Ale tento zatoužil po místě svého přítele a dobrodince. Stal se svými podlými pletichami u dvora nemožným a zbaven svého úřadu klesal, až se stal náčelníkem zlověstné sekty Ismáílíů a posléze prý i vrahem svého přítele Nizámu-l-mulka.

Druhému příteli, Omaru Chajjámovi, nabídl Nizámu-l-mulk správu Níšápúru s příslušnou provincií. Ale skromný filosof Omar namítl, že netouží po správě provincií a vládě nad lidem, a spokojil se roční pensí deseti tisíc dínárů ze státní pokladny v Níšápúru. Vedl astronomickou observatoř v Isfáhánu. Tím mu bylo umožněno cele se věnovati jeho oblíbeným vědám, matematice a hvězdářství.

V obojím proslul tak, že jeho hlavní dílo o algebře, napsané arabsky, a jiné jeho práce toho druhu ho postavily mezi přední vědce v oboru. Roku 467 byl sultánem povolán do osmičlenné komise k reformě kalendáře. Výsledkem prací této komise bylo opravené vydání astronomických tabulek a zavedení tzv. éry Táríh-i Džalálí, jež začíná 10.

ramazánem 471 A. H. (15. březnem 1079). Vedle toho napsal Omar různá vědecká díla, z nichž však se zachovaly jen „Ukázky problémů algebry“ (výpočty druhých a třetích odmocnin, metody řešení algebraických rovnic) a „Stat' o některých nesnázích definic Euklidových“, kde se zabývá problematikou Euklidova pátého postulátu.

Literárně ceněná je jeho poezie – charakteristická čtyřverší, příklady:

Svým výpočtem že jsem, dí o mně svět,
prý lépe určil pravou dráhu let?
Vždyť z kalendáře jsem jen mrtvý včír
a nezrozený zítřek odečet.

Lidé, co dají jen na rozum a logiku,
jsou blázni, kteří dojí mléko od býků.
Ať navlečou se do maškarních hadříků!
Za rozum koupíš dneska leda papriku.

V tom kruhu nebes, který spíná kolébku i hrob,
nepozná nikdo začátek i konec dob
a nepoví ti také žádný filozof,
odkud jsme přišli a kam zajdem beze stop.

Neuzavíral jsem se nikdy poznatkům věd.
Zbývalo málo, co bych mohl nevědět.
Teprve dneska vím, že nevím vůbec nic,
i když jsem bádal dvaasedmdesát let.

MATEMATIKA VE STŘEDOVĚKÉ EVROPĚ

Středověkem se rozumí období přibližně od r. 300 do r. 1500.

Ranný středověk. Starověká věda byla s nástupem křesťanství potlačena. Budovaly se kláštery, docházelo k rozvoji církevních řádů. V kláštorech se preferovala teologie. Jen vyjímečně se učení mniši věnovali světským vědám (tzv. scholastici). V matematice byl důležitý kalendář (aby byla známa přesná data církevních svátků), výpočty daní apod.

Boëthius (480 – 525). Pocházel z římského patricijského rodu Aniciů. Přijal křesťanství. Jako úředník na dvoře krále Theodorika byl poctivý a neúplatný. Snažil se chránit lid před vydíráním úředníků. Usiloval o záchranu duchovního dědictví svého umírajícího světa. Bývá označován jako **poslední Říman a první scholastik**. V důsledku intrik upadl za nevyjasněných okolností v nemilost. Byl uvězněn, mučen a nakonec popraven.

Chtěl přeložit celé Platónovo a Aristotelovo dílo do latiny. Podařilo se mu to jen zčásti. Napsal řadu knih o logice a filozofii. Zavedl termín **kvadrivium** pro čtyři (původně pythagorejské) kvadriviální disciplíny: aritmetiku, hudbu, astronomii a geometrii. Ke každé z nich sepsal úvod. Ve vězení sepsal své nejznámější dílo Filozofie utěšitelka.

Později ke kvadriviu přibýlo **trivium**. To byl základ, který předcházal studiu kvadrivia. Byla to gramatika, rétorika a dialektika. Kvadrivium a trivium představovaly tzv. **7 svobodných umění**.

Klástersní matematika se zprvu omezovala jen na základy aritmetiky, Boethius byl nejvyšším zdrojem autority. Mezi nejvýznamnější matematiky patřil Alcuin (Anglie, 2. polovina 8. stol., na obrázku uprostřed). Sepsal sbírku **Úlohy k ostření rozumu**.⁸ Ukázka dvou úloh:

1. Převozník má převézt přes řeku vlka, kozu a zelí. Do loďky může naložit je dva. Navíc nesmí nechat na břehu pohromadě vlka s kozou, ani zelí s kozou. Kolikrát musí převážet a jak to provede?
2. Pes pronásledoval králíka, který měl náskok 150 stop. Pes skočil pokaždé 9 stop, zatímco králík jen 7 stop. Po kolika skocích chytí pes králíka?



12. století. Začínají se znovu budovat kulturní styky s orientem. Španělsko a Sicílie jsou nejbližšími styčnými body. Plavba po moři je bezpečnější, rozvoj obchodu. Vznikají mocná obchodní města v Itálii: Janov, Pisa, Benátky, Milán, Florencie. Obchodní spojení s arabským světem a evropským severem. Obchodníci (např. Marco Polo) poznávali daleké kraje a poznávali i kulturu orientu. Snažili se využívat nabyté poznatky v novém experimentálním systému kapitalismu.



Leonardo Pisanský (Fibonacci, 12. stol.). Jeho otec byl úředníkem, písařem a notářem v obchodní kolonii v severní Africe. Tam Leonardo studoval, stal se obchodníkem a hodně cestoval (Egypt, Sýrie, Řecko, Sicílie, Byzanc, ...). Po roce 1220 byl již známým učencem na císařském dvoře v Pise. (Císař Fridrich II, král Neapole a Sicílie, kterého vojensky a politicky podporoval Přemysl Otakar I. Přemysl pak získal od Fridricha dědičný královský titul – zlatá bula sicilská).

Leonard byl významný matematik. Brzy si uvědomil, že základní aritmetika používající arabské číslice je mnohem jednodušší než do té doby v Evropě používané číslice římské.

Liber abaci je jeho nejvýznamnější matematická práce (asi 450 stran tištěného vydání). Obsahuje velké množství poznatků a metod, z nichž čerpalo mnoho dalších matematiků, např. i Euler.

Přinesl do Evropy indicko-arabský počet, číslice 1, 2, ..., 9, dekadický poziční systém a s ním užitečné a jednoduché algoritmy pro násobení, dělení apod. Např. devítková zkouška se užívá dodnes: Vypočítáme $123.456 = 56\,088$ a chceme se přesvědčit, zda jsme neudělali chybu. Pokud má součin ciferných součtů čísel na levé straně při dělení devíti jiný zbytek jako výsledek, určitě jsme udělali chybu. Pokud jej má stejný, je pravděpodobné, že jsme počítali dobře.

Uvádí zde také pravidla pro počítání se zlomky a řadu zajímavých úloh. Nejznámější je úloha o králících:

⁸ Její český překlad naleznete v knize Mačák, K.: Tři středověké sbírky matematických úloh, Prometheus, Praha 2001.

Kolik párů králíků se během jednoho roku narodí z jednoho páru, jestliže každý pár dá měsíčně přírůstek jeden pár, jenž bude schopen plodit po dvou měsících, když přitom žádný pár nezahyne?

Na začátku roku máme jeden pár narozených králíků, za měsíc opět 1 pár, za dva měsíce jich budou dva páry, za tři měsíce pět, potom po každém měsíci bude počet párů po řadě roven 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 a nakonec 377 párů. Každý měsíc je počet párů roven součtu počtu párů v předminulém měsíci (ty nyní již zplodili nový pár) a počtu párů v minulém měsíci (žádný pár nezahynul). Z původního páru se tedy během jednoho roku králíčí populace rozmnoží o 376 párů.

Čísla představují tzv. Fibonacciho posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, ... $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$.

Fibonacci dále uvádí obsáhlou teorii lineárních a kvadratických rovnic, řeší i některé kubické rovnice a diofantovské rovnice.

Další publikace: **Liber quadratorum, Practica geometricae.**

Příklad z Liber quadratorum: Najděte taková racionální čísla x, y, z , aby čísla

$$x + y + z + x^2, x + y + z + x^2 + y^2, x + y + z + x^2 + y^2 + z^2$$

byla čtvercová.

Fibonacci našel tato řešení:

a) $x = 35, y = 144, z = 360$ (dostaneme $42^2, 150^2, 390^2$)

b) $x = 10\frac{2}{3}, y = 64, z = 160$ (dostaneme $\left(\frac{56}{3}\right)^2, \left(\frac{200}{3}\right)^2, \left(\frac{520}{3}\right)^2$).

14. stol.

Mikuláš Oresme (biskup v Lisieux, Normandie)

Užíval mocniny s lomeným exponentem

Zápis $1p\frac{1}{2}4$, nebo $\frac{p^1}{1*2}4$ znamenal dnešní $4^{1\frac{1}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}$

Pojednání „DE LATITUDINIBUS“ (o konfiguraci kvalit)

Přechod k dnešním souřadnicím

Latitudo – šířka – nezávisle proměnná

Longitudo – délka – závisle proměnná

Zkoumá zde pohyby:

„Něco se pohybuje 1.den jistou rychlostí, druhý den dvakrát pomaleji, třetí den dvakrát pomaleji než druhý den, atd...”

Jakou dráhu urazí?“

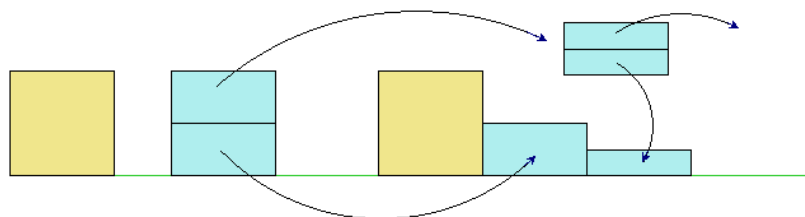
Znázornění: $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$



odtud $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

Úvaha:

2 shodné čtverce, z druhého odkrajuji a přidávám



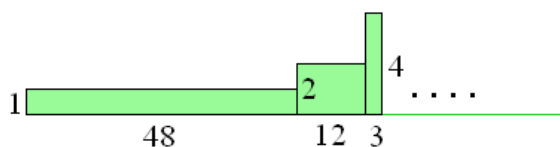
2 zvláštnosti:

a) fyzikální: nekonečně dlouhý pohyb, ale konečně dráha

b) matematická: konfigurace má nekonečné rozměry, ale jen konečný obsah

Jiný příklad:

Úsečka délky 48, odebíráme vždy $\frac{3}{4}$ a tvoříme pravoúhelníky:



$$1 \cdot 48 + 2 \cdot 12 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot \frac{3}{4} + \dots = 48 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)}_2 = 96.$$

15. století – růst obchodních měst – roste zájem o aritmetiku, účetnictví, rozvíjí se finanční matematika.

Se zánikem byzantské říše (1453) se mnoho řeckých učenců stěhuje na západ. Studium původních řeckých textů, překládání do latiny, rozvoj univerzit.

Nejstarší univerzity vynikají již ve 12. století v Itálii, Francii a Anglii, často z katedrálních škol.

Salerno: lékařská škola

Paříž: filosoficko teologická

Palermo: lékařská škola založena benediktiny kolem roku 1150

Bologna: právnická škola

Neapol: 1. státní universita

Kolem roku 1300 existovalo 20 univerzit

Praha: 1348 Karel IV. zakládací listina Pražského obecného učení.

Johannes Miller – Regiomontanus - nejvýznamnější matematik 15. st.

Počtář, tiskař, učenec, vynálezce (tvůrce přístrojů)

Přeložil práce Apolloniovy, Heronovy, Archimédovy

Napsal: Úvod do trigonometrie (sinová věta pro sférické trojúhelníky). Trigonometrické tabulky.

Leonardo Da Vinci (1452 – 1519)

Všestranná renesanční osobnost. Proslul hlavně jako malíř a sochař, zabýval se však také anatomii, astronomií, matematikou, fyzikou, meteorologií a navrhl řadu vynálezů.

Luca Pacioli – Matematik, přispěl k zjednodušení algebraické symboliky, počátky pravděpodobnosti. Působil na univerzitě V Bologni.

Summa de aritmetica

(Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita) Bylo vydáno tiskem roku 1494, první tištěné dílo o algebře.

Zjistil, že rovnici $x^4 = a + bx^2$ lze řešit kvadratickou metodou, ale rovnice $x^4 + ax^2 = b$ nebo $x^4 + a = bx^2$ neuměl vyřešit.

„Řešení rovnic $x^3 + mx = n$ a $x^3 + n = mx$ je nemožné právě tak jako kvadratura kruhu.“

De divina proportione - dílo o božské proporci. Studium vlastností zlatého řezu, které ilustroval Leonardo Da Vinci.

Kubické rovnice a objev komplexních čísel.

Scipione del Ferro (~ 1500) matematik na univerzitě v Bologni,

ovládal metodu řešení rovnice $x^3 + ax = b$ ($a, b > 0$) Metodu uchovával v tajnosti, jednou ji však sdělil svému zeti a ten ji po Ferrově smrti prozradil svému příteli, který se jmenoval Antonio Maria Fiore. Antonio Fiori začal vyzývat matematiky k soupeření. Roku 1535 vyzval Niccola Fontanu, přezdívaného Tartaglia, na soutěž. Každý z nich uložil u notáře 30 problémů pro svého protivníka. Úkolem bylo vyřešit co nejvíce ze zadaných problémů během čtyřiceti dní. Tartaglia vyřešil Fioreho úkoly během několika dní, kdežto Fiore nevyřešil ani jeden Tartagliův problém. Fontana totiž věděl, že del Ferro umí řešit rovnice typu $x^3 + ax = b$ a správně předpokládal, že úlohy od Scipione del Ferra budou výhradně tohoto typu. Po jistém úsilí našel postup jejich řešení a navíc objevil, jak řešit rovnice $x^3 = ax + b$.

Niccola Fontana (Tartaglia). Otce ztratil když mu bylo šest let. Když roku 1511 francouzští vojáci plenili jeho rodnou obec Brescia, se spolu s matkou ukryli v kostele. Katoličtí vojáci se však nezastavili ani před rabováním katolického kostela a vraždili ženy i děti, které v kostele hledali útočiště. Malý Niccolo utržil několik sečných rán mečem, z nichž jedna mu roztřela ústa a podnebí ústní dutiny. Masakr sice přežil, ale se špatně srostlými ústy mohl jen těžko mluvit a koktal. Tehdy získal přezdívku Tartaglia (italsky Koktavý), která jej doprovázela po celý život. Ve čtrnácti letech se mu dostalo 15 dnů školního vzdělání. Na takové období totiž byla jeho matka schopna zaplatit školné. V abecedě se dostali k písmenu k. Zbytek se naučil sám. Byl pilný, naučil se latinsky a od věku 23 let si ve Veroně vydělával výukou matematiky. Stal se z něj výborný matematik. Řešil matematické problémy, s nimiž se na něj obraceli obchodníci, stavitelé, dělostřelci a pod. Napsal knihu o balistice, první překlad Eukleidových *Základů* do Italského a šestidílný kurs matematiky.

Po soutěži se očekávalo, že Fontana zveřejní postup řešení kubických rovnic. Ten se vymlouval že postup zveřejní ve svém matematickém díle, které se chystá sepsat. V roce 1537 vydal knihu *Nova scientia*, čtenáři zde však místo slibovaného řešení kubických rovnic našli pojednání o balistice.

Dalším mužem tohoto příběhu byl Girolamo Cardano, italský lékař, filozof a matematik. Byl nemanželským synem milánského prokurátora Facia Cardana. Facio později koupil v Miláně dům pro Claru, Cardanovu matku, dokonce se i k nim přistěhoval, ale Claru si za ženu nevzal. Girolamovo dětství bylo poznamenáno různými nemocemi, úrazy a hlavně nelaskavým až krutým zacházením. Matka se za něj hanbila, otec ho využíval jako sluhu a jeho vrstevníci se mu posmívali. Clare sa nakonec podařilo přemluvit Facia, aby dal syna studovat. Girolamo během si tří let osvojil poznatky potřebné ke studiu na univerzitě. Roku 1524 začal studovat na Padovské univerzitě medicínu. Již v ponížené dětské duši se zrodilo rozhodnutí, že bude slavný. Stal, se jedním z nejslavnějších lékařů své doby - králové i velmoži jej zvali na svůj dvůr. Napsal řadu prací z oblasti medicíny a filozofie. V matematice se jeho jméno spojuje s řešením rovnic třetího stupně.

Když se Cardanovi donesly zvěsti o Tartagliových úspěších, vetřel se do jeho přízně a časem z něj pod slibem, že tajemství neprozradí, vymámil postup řešení kubických rovnic (slíbil Fontanovi, že mu najde mecenáše pro jeho delostřelecké výzkumy). Roku 1542 se do rukou Girolama Cardana dostala pozůstalost Scipione del Ferra. Cardano se pak již necítil daným slibem zavázán. Sepsal dílo *Ars Magna* (1545), kde popisuje řešení algebraických rovnic prvního až čtvrtého stupně. Prozradil zde Tartagliovu metodu. Proto se vztahy pro kořeny kubické rovnice nazývají Cardanovým jménem, i když je Cardano neobjevil, ale pouze je zobecnil a jako první publikoval. Kromě zesystematizování Fontanových výsledků obsahuje *Ars Magna* i významný objev, tzv. *casus irreducibilis*, kdy má rovnice dva komplexně sdružené kořeny. Tehdy ovšem ještě nebyla komplexní čísla známa. Cardano v případě *casus irreducibilis* ukázal výpočet reálného kořenu přes formální počítání s odmocninami ze záporných čísel, které se v Cardanově vzorci vyskytly. Význam výpočtu nepochopil, označil jej jako „vychytralý a neužitečný“. Podrobnosti co v *Ars Magna* Cardano napsal naleznete na adrese

<http://www.matika.sk/archiv/kvasz/Dejalg/Cast5/Part5-1.htm>

Fontana se cítil být podveden a za porušení přísahy se chtěl Cardanovi pomstít. Roku 1546 vydal knihu *Otázky a různé vynálezy*, v níž mimo jiné popsal, jak jej Cardano podvedl a jak z něj vylákal jeho tajemství. Cardana proti Fontanovu osočování bránil jeho žák Ludovico Ferrari. Vyzval Fontanu na veřejnou disputaci a soutěž v roce 1548 v Miláně. Fontana však neměl šanci proti o 22 let mladšímu Ferrarimu, obklopenému přáteli a žáky. Sotva ho pustili ke slovu a pokud ano, byl zesměšněn kvůli svému koktání. Proto nakonec bez slova odešel a tím přiznal porážku. Fontanovi přinesla porážka trpký osud. Všechny dveře se před ním zavíraly. Odešel do Benátek, kde pokračoval ve svojom boji o prvenstvo. Napsal ještě několik knih. Z jeho nejvýznamnějšího díla, šestidílného *General Trattato*, mu v roce 1556 vyšly první čtyři díly. Niccolo Fontana v roce 1557 zemřel, a tak se již nedožil vytištění pátého dílu. Šestý díl, pojednávající o řešení rovnic třetího stupně, již vytištěn nebyl a rukopis se ztratil.

Ludovico Ferrari byl ve svých patnácti letech zaměstnán u Cardana jako poslíček. Cardano si všiml jeho talentu, velmi si ho oblíbil a dovolil mu chodit na své přednášky. Ferrari se časem vypracoval až na profesora matematiky Bolognské univerzity. Proslavil se tím, že našel postup řešení rovnic čtvrtého stupně.

Rafael Bombelli (1530 - 1572) byl další matematik na univerzitě v Bologni. Napsal knihu *L'Algebra*, kde uvádí výpočty odmocnin pomocí řetězových zlomků, pravidla pro počítání

se zápornými čísly a pravidla pro počítání s odmocninami ze záporných čísel. Takové odmocniny na rozdíl od Cardana považuje za čísla. Poznamenejme, že termín *imaginární číslo* zavedl Descartes ve své Geometrii v roce 1637 a znázornění komplexních čísel jako bodů v rovině pochází od Gausse (1799).

Pro kořen rovnice $x^3 = ax + b$ uvádí Cardano vzorec

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{D}}, \text{ kde } D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

V případě casus irreducibilis je $D < 0$, ale rovnice má reálný kořen.

Například rovnice $x^3 = 15x + 4$ má $D < 0$ a přesto má kořen $x = 4$, jak se snadno přesvědčíme.

Po dosazení do vzorce je $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$

Pokud budeme pracovat (formálně) s $\sqrt{-1}$ jako s číslem, platí

$$(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 8 \pm 12\sqrt{-1} + 6(\sqrt{-1})^2 \pm (\sqrt{-1})^3$$

$$\sqrt{-1}^2 = -1, \sqrt{-1}^3 = \sqrt{-1}, \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$$

$$\text{tedy: } (2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm 11\sqrt{-1} = 2 \pm \sqrt{-121}$$

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 4$$

Objevem komplexních čísel středověká matematika poprvé překonala Antiku

Více podrobností naleznete na stránkách

<http://www.matika.sk/archiv/kvasz/Dejalg/Obsah.htm>

16. – 17. stol.

Johannes Kepler.

Narodil se 27. prosince 1571 ve svobodném městě Svaté říše římské Weil der Stadt nedaleko Württenburgu. Jeho otec byl žoldnér, matka byla dcerou hostinského. Johannes byl jejich první dítě. Ve svých šesti letech pozoruje Kepler na obloze výraznou kometu a to v něm probouzí zájem o astronomii. V roce 1588 dokončuje svá první studia na universitě v německém Tübingenu, kde studoval, s úmyslem stát se knězem luteránské církve. O rok později začíná studovat filosofii, matematiku a astronomii na téže universitě. Zde studoval astronomii u významného astronoma té doby Michaela Maestlina. Roku 1591 ji absolvuje a začíná se připravovat na teologické povolání. Po třech



letech myšlenku stát se knězem opouští a nastupuje jako učitel matematiky a astronomie v rakouském Štýrském Hradci.

V roce 1595 vytváří *kalendář astrologických předpovědí* pro tento rok (tvorbou astrologického kalendáře si vylepšoval svůj příjem).

Rok na to vydává

Mysterium cosmographicum Najdeme zde jeho předpoklad, že vzdálenosti všech šesti známých planet od Slunce mohou být porovnány s pěti pravidelnými geometrickými tělesy (čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn).

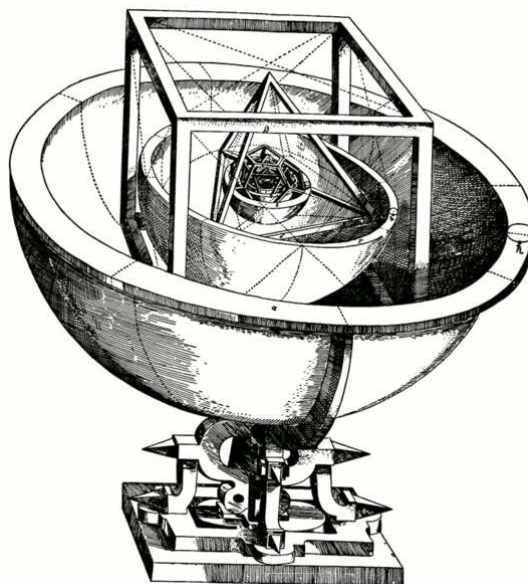
Saturn a Jupiter – krychle

Jupiter a Mars – čtyřstěn

Mars a Země - 12 - stěn

Země a Venuše – 20 - stěn

Venuše a Merkur – 8 – stěn



Roku 1598 je Kepler kvůli pronásledování protestantů katolíky přinucen opustit Hradec.

Rok stráví v Praze a opět se vrací do Štýrského Hradce. Odtud je následujícího léta opět vyhnán

a vrací se do Prahy. Stává se pomocníkem dánského astronoma Tychona Brahe.

V roce 1601 Brahe umírá a Kepler po něm přebírá jeho funkci dvorního matematika císaře Svaté říše římské, Rudolfa II.

Roku 1609 vydává *Astronomia nova* (Nová astronomie), ve které formuluje první dva zákony pohybu planet.

Dva roky nato publikuje *Dioptrice*, spis věnovaný optice a návrhu dalekohledů. Jeho návrh, jak konstruovat dalekohled se stává v astronomii standardem.

Po smrti císaře Rudolfa II. (1612) Kepler odchází do Lince a stává se vrchním matematikem Horních Rakous.

V roce 1615 publikuje knihu *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* (Nová stereometrie vinných sudů). Odvážil se opustit Archimédovskou přesnost, určil objem asi pro 100 rotačních těles přibližnou metodou. Počítal objemy těles, které vznikly rotací kuželoseček kolem osy ležící v jejich rovině. Přitom použil infinitezimálních metod a toto dílo znamenalo významný krok ke vzniku moderních integračních metod.

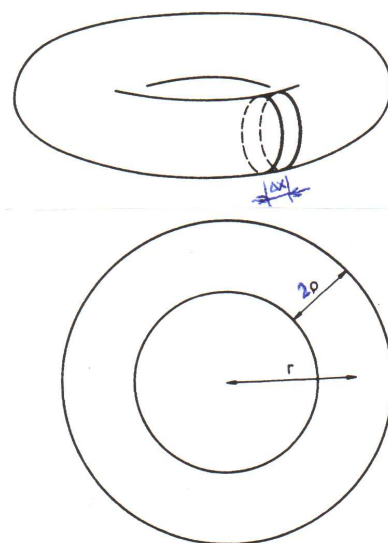
Toroid

$$\Delta V = \pi \rho^2 \Delta x$$

$$V = \sum \pi \rho^2 \Delta x = \pi \rho^2 \sum \Delta x$$

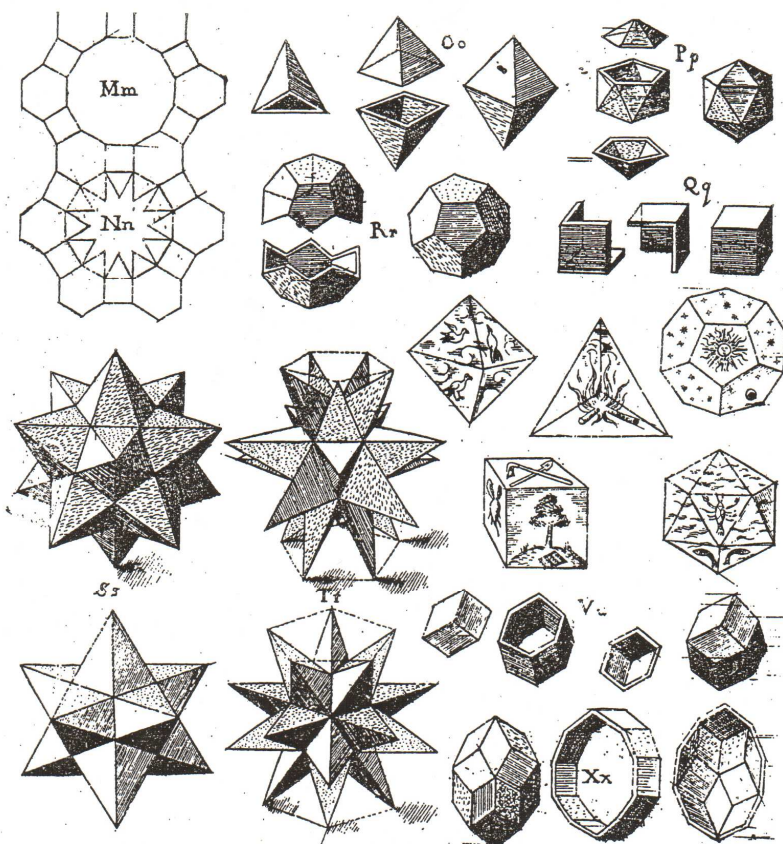
$$\sum \Delta x = 2\pi r$$

$$V = 2\pi^2 \rho^2 r$$



Na základních školách se keplerovskou metodou odvozuje vzorec pro obsah kruhu.

V práci *Harmonices Mundi* (*Harmonie světa* - 1619) systematicky studoval mimo jiné problematiku konvexních a hvězdovitých mnohoúhelníků a publikoval svůj třetí zákon.



V roce 1628 se stává soukromým matematikem Albrechta z Valdštejna, vévody Frýdlantského a velitele císařské armády Ferdinanda II.

Dne 15. listopadu 1630 v důsledku horečky na cestě do Řezna v Bavorsku umírá.

Keplerovy zákony:

I. Keplerův zákon. Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách, které jsou málo odlišné od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

II. Keplerův zákon. Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.

III. Keplerův zákon. Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.

Doporučená literatura:

Kitty Fergusonová: Tycho a Kepler

James A. Connor: Keplerova čarodějnice

François Viète (1540-1603) - francouzský právník a advokát činný v různých státních úřadech a rozluštil mj. tajný španělský kódovací klíč, který obsahoval 500 různých značek. Francie tehdy válčila se Španělskem. Nakonec to díky svým schopnostem a několikanásobnou změnou náboženského přesvědčení dotáhl až na tajného radu francouzského krále.



Roku 1591 vydal *In artem analyticam isagoe* (Úvod do analytického učení). Zavedl tzv. koeficienty, což byla písmena, která označovala čísla. Je proto považován za „otce algebry“, zakladatele moderních algebraických zápisů pomocí proměnných. Oddělil tak algebru od aritmetiky, tj. počítání pomocí písmen od počítání s konkrétními čísly.

Ze starověku převzal zákon homogenity: Každá veličina má svůj rozměr. Sčítat a odčítat lze jen veličiny téhož rozměru. Při násobení se rozměry „sčítají“.

Ars analytica (Analytické umění) - řešení obecných tvarů různých rovnic.

Marin Mersenne (1588-1648) - teolog, filosof, přírodovědec a hudební teoretik. V matematice se věnoval editaci práce Eukleida, Archimeda, a jiných matematiků. Jeho nejdůležitější příspěvek k zálohám učení byla však jeho rozsáhlá korespondence (v latině s matematiky a jinými vědci v mnohých zemích, neboť v době neexistence vědeckých časopisů byl Mersenne centrem sítě pro výměnu informací. Označován jako „**tajemník učené Evropy**“. V Minoritském klášteře v Paříži se u něj každý týden scházeli vědci a filozofové. Okruh účastníků těchto schůzek byl základem pozdější Akademie věd (založil Colbert, ministr Ludvíka XIV osmnáct let po Mersennově smrti).



V *Cogitata Physica-Mathematica* uvedl, že čísla tvaru $M_n = 2^n - 1$ jsou prvočísla pro $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$, kdežto všechna další M_n pro $n < 257$ jsou čísla složená. Nikdo neví, jak na tento objev přišel, ale příliš se nezmýlil. V roce 1947 bylo pomocí prvních počítačů zjištěno pouze 5 Mersennových chyb: M_{67} a M_{257} nejsou prvočísla a naopak M_{61} , M_{89} a M_{107} jsou prvočísla. Čísla M_n se nazývají Mersennova čísla.

Pierre de Fermat (1601-1665). Pocházel z francouzského šlechtického rodu, nebyl matematikem z povolání, ale právníkem místního parlamentu v Toulouse a poté soudcem hrdebního soudu. Všeestranně nadaný, studoval i překládal originály antických autorů. Matematikou se zabýval ve volném čase - největší matematik amatér. Během svého života žádné matematické dílo nepublikoval a nerad cestoval. Jeho spisy vydali až Fermatovi dědicové. Dopisoval si s významnými učenici (např. Descartesem a Pascalem). Stál u zrodu analytické geometrie, počtu pravděpodobnosti, matematické analýzy a geometrické optiky. Učinil významné objevy v teorii čísel.



Počet pravděpodobnosti - Fermat se otázkou pravděpodobnosti zabýval již v mládí společně se svým přítelem Blaisem Pascalem. V r. 1653 narazil Pascal na tento problém znovu, když byl požádán, aby odhadl šanci na vítězství při hře v kostky. V následujícím roce si Pascal s Fermatem vyměnili sérii dopisů, ve kterých se fakticky zrodila teorie pravděpodobnosti. Inspirovali tím řadu dalších matematiků a nový obor, u jehož počátků stojí hazardní hry, byl na světě.

Analytická geometrie - Fermat a Descartes objevili analytickou geometrii prakticky současně, za tvůrce analytické geometrie je považován Descartes, protože ji roku 1637 jako první publikoval. V téže roce sepsal Fermat *Úvod do rovinných a tělesových geometrických míst*. Nepublikoval je však a navíc používal méně vhodnou symboliku. K myšlence analytické geometrie jej inspirovalo Apolloniovo dílo o kuželosečkách. Fermatova práce nebyla prakticky známá a neovlivnila další vývoj.

Matematická analýza - Studium křivek, při kterém se těsně přiblížil k vytvoření integrálního a diferenciálního počtu, za jehož zakladatele jsou považováni Newton a Leibnitz..

V lednu 1638, bezprostředně po zveřejnění Descartesovy Geometrie, napsal Mersenovi dopis, ve kterém popisuje metodu určení tečny ke křivce na základě „minimálního rozdílu mezi křivkou a tečnou“ v blízkosti bodu dotyku. Fermatovo určení tečny ke křivce:

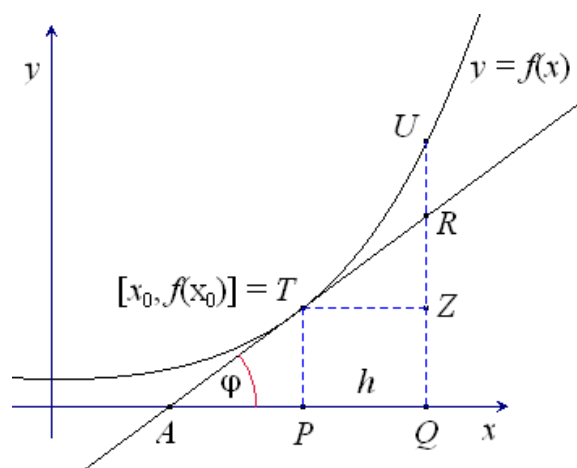
$$\frac{|AP|}{|PT|} = \frac{|TZ|}{|RZ|}$$

$$|TZ| = h \rightarrow 0, \text{ pak } |UR| = 0,$$

$$\text{odtud } |RZ| = |UZ| = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\frac{|AP|}{f(x_0)} = \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$$

$$|AP| = \frac{h \cdot f(x_0)}{f(x_0 + h) - f(x_0)}$$



Obr. 1

Zlomek rozšířil výrazem $\frac{1}{h}$ a pak položil trojúhelník $h = 0$. To odpovídá zanedbání velmi malých veličin vyšších řádů. Z dnešního pohledu je po této úpravě je výraz ve jmenovateli derivací:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Užitím postupu Fermatova pro $f(x) = x^2$ dostáváme

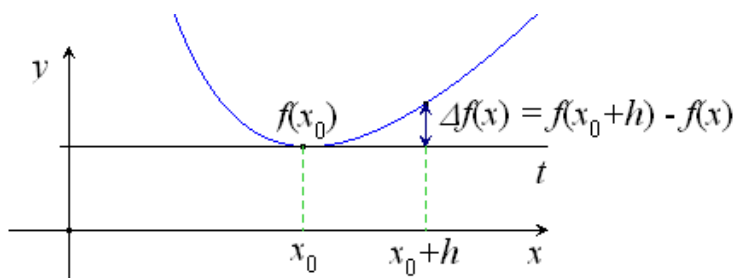
$$|AP| = \frac{h \cdot x_0^2}{(x_0 + h)^2} = \frac{h \cdot x_0^2}{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}$$

a odtud po rozšíření zlomku výrazem $\frac{1}{h}$ máme $|AP| = \frac{x_0^2}{2x_0 + h}$. Nyní po Fermatově vzoru

položíme $h = 0$ a dostane, a $|AP| = \frac{x_0}{2}$. Tento vztah umožňuje sestavit body P a T pro zvolený bod T grafu funkce a tím i tečnu v bodě T . Dnes bychom určovali tečnu bodem T a její směrnici $k = f'(x_0) = 2x_0$. Z obrázku vidíme, že $k = \tan \varphi = \frac{f(x_0)}{|AP|} = \frac{x_0^2}{x_0/2} = 2x_0$, což odpovídá výpočtu užitím derivace.

Fermat si uvědomil hluboký význam této metody, která je podstatou hledání lokálních extrémů. V dopise Mersenovi píše: „Metoda nikdy nezklame a může být použita na řadu nádherných problémů: skrze ni lze určit těžiště útvarů ohraničených zakřivenými a přímými čarami, těles a mnoho dalších věcí, které budu vyšetřovat postupně, jestliže budu mít čas.“

Při hledání lokálního extrému funkce vycházel Fermat z faktu, že extrém je v bodě dotyku s tečnou rovnoběžnou s osou x (obr. 2). Při hledání tohoto bodu opět položil $\Delta f(x) = 0$, pak rovnici vydělil veličinou h , o níž předpokládal, že je nekonečně malá, a nakonec zanedbal členy obsahující h . Ukážeme to na příkladu funkce $f(x) = x^2 - 6x + 10$.



Obr. 2

$$((x_0 + h)^2 - 6(x_0 + h) + 10) - (x_0^2 - 6x_0 + 10) = 0$$

Po úpravě dostaneme

$$-2x_0h + h^2 + 6h = 0,$$

odtud po vydělení číslem h máme

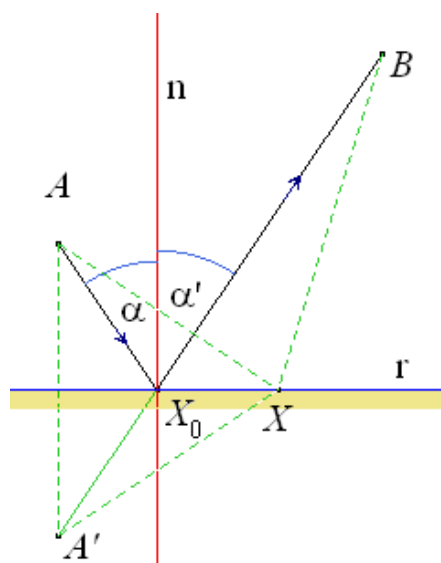
$$-2x_0 + 6 - h = 0$$

a po zanedbání malé veličiny h zjistíme $x_0 = 3$, $f(3) = 1$. Z grafu zjistíme, že je to lokální minimum.

Zákon lomu

Když v roce 1637 odvodil Descartes ve své *Dioptrice* zákon odrazu a lomu světla na základě analogie pohybu míče, vyvolalo to řadu diskusí.

Fermat byl jedním z těch, kterým se Descartesův postup nelíbil. Domníval se, že otázku lomu nelze řešit balisticky, protože světlo si vždy „vybírá“ trajektorii, která odpovídá nejmenšímu času. Zpočátku si ale nebyl se svým názorem jist. Fermat k tomuto principu nejkratšího času dospěl na základě studia prací Herona Alexandrijského. Podle Herona totiž totiž světelný paprsek, který se má dostat z bodu A do bodu B odrazem na zrcadle nebo vodní hladině r , zvolí vždy nejkratší trajektorii. Na obr.2 je to lomená čára AX_0B , kde X_0 je průsečík přímky $A'B$ s přímkou r a je A' obraz bodu A v souměrnosti podle r . Snadno nahlédneme, že dráha $s = |AXB|$ je nejkratší pro $X = X_0$, protože

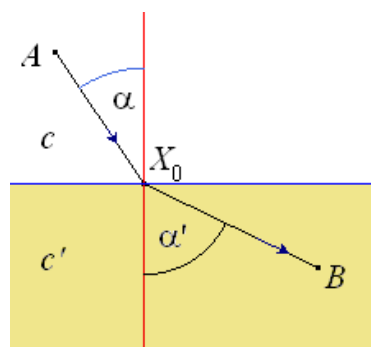


Obr. 2

$$s = |AX| + |XB| = |A'X| + |XB| \geq |A'B| = |A'X_0| + |X_0B| = |AX_0| + |X_0B|.$$

Z konstrukce na obrázku pak lze odvodit tzv. zákon odrazu: $\alpha' = \alpha$ (důkaz proveďte sami).

Při lomu není dráha nejkratší, to by trajektorii musela být úsečka AB , ve skutečnosti se světlo lomí podle obr 3. Při četbě Heronova spisu si Fermat uvědomil, že nejkratší trajektorie v případě lomu je zároveň trajektorii nejkratšího času, a že by tento postulát mohl platit obecně, tedy i pro lom. Až v roce 1657, kdy de la Chambre vydal knihu *Light*, v níž vyjádřil nesouhlas s těmi, co se snažili vysvětlit pohyb světla balisticky, dospěl Fermat k přesvědčení o správnosti principu nejkratšího času a dal se do hledání zákona lomu pomocí něj.



Obr. 3

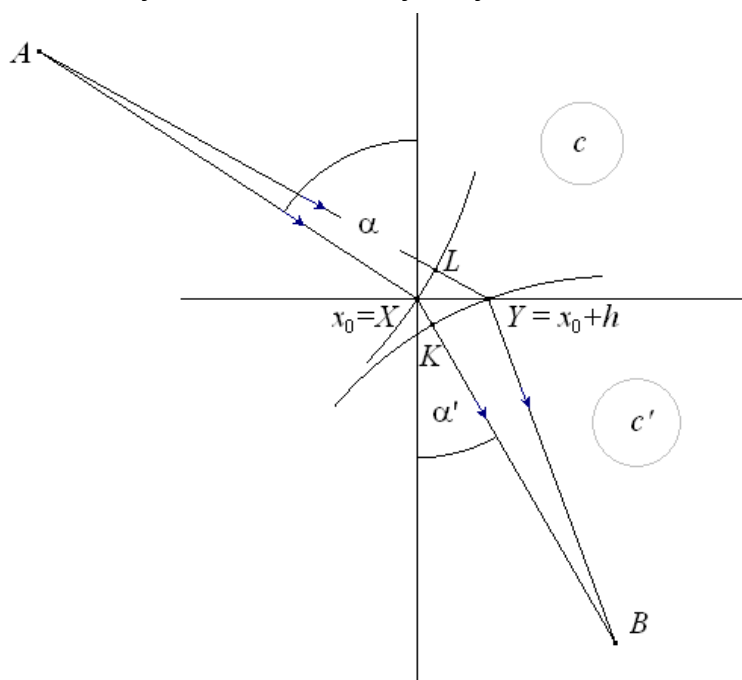
Problém vyřešil až v roce 1662, tedy téměř 25 let po vydání Descartesovy *Dioptriky*. Ke svému překvapení zjistil, že zákon lomu má stejný tvar, jak jej odvodil Descartes:

$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{c'}{c}$ kde α a α' jsou úhly dopadu a lomu, c, c' rychlosti světla v prvním a druhém prostředí.

Poznamenejme, že zákon lomu jako první objevil holandský matematik Willebrord van Royen Snell (1580-1626) a na univerzitě v Leidenu jej sdělil na přednáškách svým studentům. Nepublikoval jej však, a tak zákon nebyl na veřejnosti znám. (O Snellově objevu píše až Huyghens v roce 1703). Descartesovi odpůrci tvrdí, že Descartes se o tomto zákonu od někoho dozvěděl a své odvození vykonstruoval tak, aby to vyšlo.

Později se ukázalo, že Fermatův princip, později vyslovený jako princip extrémálního času, je nejen základním principem celé geometrické optiky, ale má obecnější platnost.

Fermat zákon lomu odvodil svojí výše uvedenou metodou určování extrémů, výpočet byl složitý. Proto ukážeme jednodušší postup založený na stejné metodě tak, jak jej uvádí Feynmann ve svém kurzu fyziky.



Obr. 4

Při označení podle obr. 4 a pro velmi malé h splývají oblouky

XL a KY kružnic $k(A, |AX|)$ a $l(B, |BY|)$ s těžnicemi XL a KY , trojúhelníky XYL a XYK jsou pravoúhlé se společnou přeponou XY a platí $|\angle LXY| = \alpha$ a $|\angle KYX| = \alpha'$.

Hledáme minimální čas, v kterém světlo dorazí z bodu A do bodu B , přitom jeho rychlost šíření je v prvním prostředí c a ve druhém c' . Jestliže trajektorii AXB odpovídá minimální čas, pak rozdíl časů $t(x_0 + h) - t(x_0)$, které odpovídají trajektoriím AYB a AXB je pro velmi malé h roven nule. To znamená, že

$$t(x_0 + h) - t(x_0) = \frac{|XY| \sin \alpha}{c} - \frac{|XY| \sin \alpha'}{c'} = 0$$

a odtud

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{c'}{c}.$$

Velká Fermatova věta. Při studiu jednoho antického spisu, Diofantovy Aritmetiky, ji Fermat napsal na prázdný okraj vedle textu. Věta říká, že

rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá žádné řešení (v přirozených číslech) pro n větší než dvě.

(Při $n = 2$ existuje nekonečně mnoho řešení, jsou to tzv. pythagorejské trojice, například $(x, y, z) = (3, 4, 5)$. Pro $n = 3$ nebo větší už žádné takové řešení nalézt nelze.)

Fermat na okraj stránky ještě připsal: "*Mám skutečně nádherný důkaz tohoto tvrzení, avšak tento okraj je příliš úzký na to, abych jej zde uvedl.*" Když zemřel, v jeho pozůstalosti nebyl zmíněný důkaz nikde nalezen. Od té doby větu zkoušelo dokázat mnoho matematiků. Všechny ostatní Fermatovy hypotézy byly mezitím dokázány nebo vyvráceny, ale jeho velká věta vzdorovala všem pokusům. V roce 1908 vypsala gottingenská univerzita odměnu 100 tisíc marek pro toho, kdo důkaz velké Fermatovy věty nalezne. V červnu 1993 se přihlásil anglický matematik Andrew Wiles z Cambridge, ale už v prosinci téhož roku oponenti odhalili v důkaze chybu. Wiles poté spolu s dalším matematikem Taylorem provedl opravy a předložil novou verzi důkazu. Tentokrát o důkazu nikdo nepochyboval. Důkaz po důkladné kontrole vyšel roku 1995 ve formě dvou článků v časopise *Annals of Mathematics*. Celkový rozsah obou článků byl 130 stran.

Obrázek známky, kterou vydala Česká republika v roce 2000 u příležitosti světového roku matematiky.

Na proužku, který přeškrťává rovnítko, je napsáno:

ANDREW WILES 1995



Pozn. Podle některých hypotéz Fermat patrně dokázal větu metodou nekonečného sestupu jen pro některá n a domníval se, že ten postup lze uplatnit pro jakákoli n celá a větší než 2.

Malá věta Fermatova (1640, bez důkazu)

- I. pro každé $a \in \mathbb{Z}$ a pro každé prvočíslo p platí $p \nmid (a^p - a)$
- II. pro každé celé číslo a , které je nesoudělné s prvočíslem p , platí $p \nmid (a^{p-1} - 1)$, větu dokázal Euler, který ji navíc zobecnil.

Fermat se též zabýval problematikou dokonalých a spřátelených čísel.

Dokonalá čísla jsou rovna součtu všech svých dělitelů menších než číslo samo

Například $6 = 1 + 2 + 3$
 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

Spřátelená čísla: součet vlastních dělitelů každého z nich se rovná druhému z těchto čísel:

220 a 248 jsou spřátelená:

$$1+2+4+5+10+11+22+44+55+110=284$$

$$1+2+4+71+142=220$$

Fermat objevil Thabitovu formuli (1636): Jsou-li a, b, c prvočísla a pro vhodné $n > 1$ platí

$$a = 3 \cdot 2^n - 1, b = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, c = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1,$$

pak jsou čísla $2^n ab$ a $2^n c$ spřátelená.

I přes uvedenou formuli se spřátelená čísla těžko hledají. Pro $n < 20000$ lze najít jen tři dvojice

220 a 284 ($n = 2$),

17 296 a 18 416 ($n = 4$)

9 363 584 a 9 437 056.

Euler našel 60 dvojic.

Školák N. Paganini našel v roce 1866 čísla 1 184 a 1 210.

Fermatova čísla

Roku 1640 sdělil Fermat Mersenovi, že všechna čísla $F_n = 2^{2^n} + 1$, kde $n \in N_0$, jsou prvočísla.

Tento výrok vyvrátil v roce 1732 Euler. Čísla F_n mají mnoho zajímavých vlastností.

René Descartes (1596-1650)

Francouzský šlechtic, filosof, matematik. Během studií (jezuitská kolej La Fleche, universita v Poitiers) se seznámil s M. Mersenem. Ztratil důvěru k základům věd kromě matematiky.

Po ukončení studií (právo, medicína) dospěl k názoru, že „velká kniha světa“ a vlastní rozum jsou užitečnější, než nejlepší university.

1618-dobrovolník holandského vojska Cest využíval k setkání s významnými vědeckými osobami:

Simon Stevin- knihkupec a vojenský inženýr (vektory)

Snell Van Rojen – profesor matematiky u Leidenu (zákon lomu)

Isaac Beeckmann – matematik, fyzik, lékař



Johann Faulhaber – vojenský inženýr (ULM) (prostorové zobecnění Pythagorovy věty)

Od roku 1619 působil Descartes ve vojsku Maxmiliána Bavorského. S bavorským vojskem prošel Čechy, Moravu, Uhry. V dalších letech hodně cestoval (Švýcarsko, Itálie), občas navštěvoval Paříž. V roce 1649 pozván královnou Kristýnou na její dvůr do Stockholmu, kde o rok později zemřel následkem drsného počasí a chatrného zdraví.

Jeho hlavním dílem je *Rozprava o metodě* vydaná roku 1637 se třemi doplňkovými spisy: *Dioptrika*, *Meteory*, *Geometrie*.

Heuristika-metoda objevování. Heuristici se snažili nalézt obecnou metodu na řešení problémů.

V *Geometrii* Descartes popsal metodu analytické geometrie

Další velké práce:

1641 Úvahy o první filosofii,

1644 Základy filosofie (věnováno Alžbětě Falcké) - největší Descartesovo dílo,

1645 - 46 O zakoušeních duše (traktát obsahující otázky o nichž si dopisoval s Alžbětou)

Alžběta Falcká (1618 - 1680), dcera Bedřicha Falckého (tzv. zimního krále), česká princezna. Byla všestranně nadaná, zabývala se filozofií a matematikou. Descartes se zapojil do její výuky a jejich vztah se časem změnil v přátelství. Zachovala se jejich korespondence o etice, přírodovědě, filozofii a psychologii.



Descartesův matematický přínos

- 1) Analytická geometrie.
- 2) Rozšíření číselných oborů (užívání záporných a komplexních čísel).
- 3) Zjednodušování matematické symboliky
 - známé veličiny: a, b, c
 - neznámé: x, y, z
 - zápisy mocnin a^2, a^3
 - užíval již dříve zavedená znaménka „+“ a „-“, pro sčítání a odečítání.
- 4) Základní věta algebry: každá algebraická rovnice může mít tolik kořenů, kolik je její stupeň (ekvivalentní věty byly publikovány již dříve – P. Rothe, A. Girard. Přesný důkaz podal až Gausus)
Descartes ukazuje, jak rovnice vznikají postupným násobením rovnic nižších stupňů
například $x - 3 = 0 \wedge x - 2 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$.
- 5) Znaménkové pravidlo:
Rovnice má tolik kladných kořenů, kolik je znaménkových změn v posloupnosti jejích koeficientů. Descartesovi se přisuzuje metoda neurčitých koeficientů (Schooten)

6) Odstranění zákona homogenity

Podle Vieta: Jsou – li a, b délkové veličiny, pak ab je plocha, ale a/b nelze uvažovat (nemá rozměr).

Descartes: Chceme-li, aby ab byla délka, pak místo ab vezmeme ab/e , kde e je délka jednotkové úsečky.

Veličinu $\frac{b}{b}$ si analogicky můžeme představit jako $\frac{be}{b}$, pak má význam délky.

Podobně veličinu $\sqrt{a}$ interpretujeme jako $\sqrt{a \cdot e}$, což je délka.

Zdůvodňuje to pomocí Euklidovy věty o výšce

7) Byl přesvědčen o neřešitelnosti trisekce úhlu a zdvojení krychle pravítkem a kružítkem.

8) Přispěl k rozvoji proměnná a funkce

9) Descartesův list (viz obrázek):

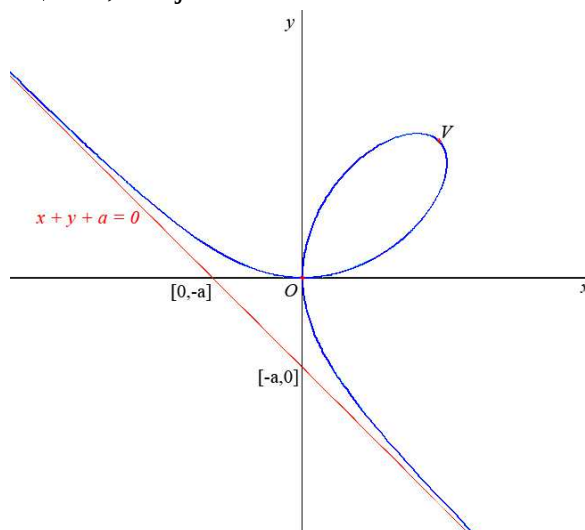
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Asymptota: $x + y + a = 0$ vrchol listu:

$$[3a/2, 3a/2]$$

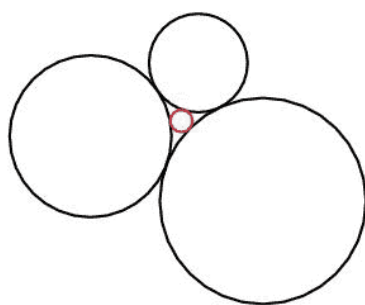
Obsah: $3/2 a^2$ (je stejný mezi asymptotou a větvemi)

10) Descartesovy ovály, řada dalších menších výsledků

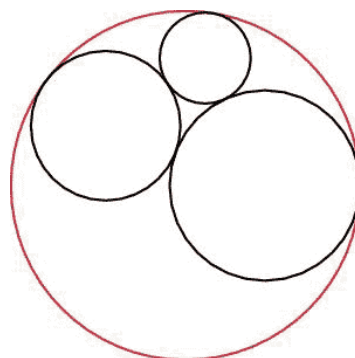


Vypočtený polibek

V roce 1643 se René Descartes a Alžběta Falcká zabývali řešením Apolloniovy úlohy, jak víme z jejich korespondence. Descartes Alžbětě uložil, aby se pokusila vypočítat střed a poloměr kružnice, která se dotýká tří daných kružnic. Alžběta jej překvapila svým přístupem k problému i svými výsledky, třebaže nakonec obecnou úlohu nevyřešili. Povedlo se jim však získat velmi pěkný výsledek pro situaci, kdy se dané kružnice navzájem dotýkají. Nalezli vztah mezi jejich poloměry a poloměrem hledané kružnice, která je buď mezi dané kružnice vepsána nebo je jim opsána, jak vidíme na obrázcích 5 a 6. Je to krásný symetrický vztah. Detailní výpočet se nezachoval, tak neznáme jejich přesný postup. Z korespondence plyne, že užívali Pythagorovu větu a zmiňovali i Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku z délek jeho stran a trojúhelníky, jejichž vrcholy tvoří středy kružnic. Nevíme ani, jakou měrou se kdo z nich na výpočtu podílel. Je však zřejmé, že Descartes ocenil Alžbětin výpočet a změnil svůj přístup k ní. Začal ji považovat za kolegyni, ne již za pouhou žačku.



Obr. 5



Obr. 6

Descartes uvádí v dopise, že poloměry kružnic na obr. 5 splňují vztah

$$\begin{aligned} r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2 = \\ = 2r_1 r_2 r_3^2 r_4^2 + 2r_1 r_2^2 r_3 r_4^2 + 2r_1^2 r_2 r_3 r_4^2 + 2r_1 r_2^2 r_3^2 r_4 + 2r_1^2 r_2 r_3^2 r_4 + 2r_1^2 r_2^2 r_3 r_4 \end{aligned}$$

Tuto rovnici lze snadno převést na ekvivalentní tvar

$$2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} \right) = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2, \quad (x)$$

ve kterém se obvykle uvádí dnes. Vztah pro poloměry navzájem se dotýkajících kružnic byl jinými matematiky několikrát „znovu objeven“. Někdy šlo o speciální situace. Například na jedné z desek SANGAKU byla nakreslena situace z obr. 7 a uveden příslušný vztah pro poloměry tří kružnic. Poznamenejme, že v Japonsku se v 17. a 18. století zabývali někteří mniši hledáním metrických vztahů pro různé konfigurace kružnic, úseček a n -úhelníků. SANGAKU byly dřevěné desky, které vyvěšovali na zdi chrámů a znázorňovali na nich své geometrické výsledky. Je známo asi 800 takových desek.

Populárním se vztah (x) stal až v roce 1936, kdy jej znovu „objevil“ chemik Frederick Soddy (nositel Nobelovy ceny za práci o izotopech) a byl tím objevem tak nadšen, že jej publikoval v časopisu *Natura* a výsledek uvedl formou básně, kterou nazval *Vypočtený polibek*.

V dalších slokách Soddy slovy popisuje vzorec (x), který odvodil. Věta o dotýkajících se kružnicích bývá nazývána „Kissing Circles Theorem“.

Blaise Pascal (1623-1662)

Pocházel ze zámožné a vzdělané rodiny. Matka brzy zemřela a otec, který se 1631 přestěhoval s dětmi do Paříže, mu poskytl vynikající humanitní vzdělání; ač sám byl dobrým matematikem, před chlapcem vědu zatajil. Musel však kapitulovat, když zjistil, že si ve 12 letech sám odvodil že součet velikostí úhlů v trojúhelníku je 180^0 . Od 14 let chodil se svým otcem na schůzky u Mersenna.



V 17 letech napsal *Pojednání o kuželosečkách*, které ocenila Pařížská královská akademie a Descartes spis pokládal za práci jeho otce. V této Pascalově práci je uvedena i slavná **Pascalova věta** z projektivní geometrie:

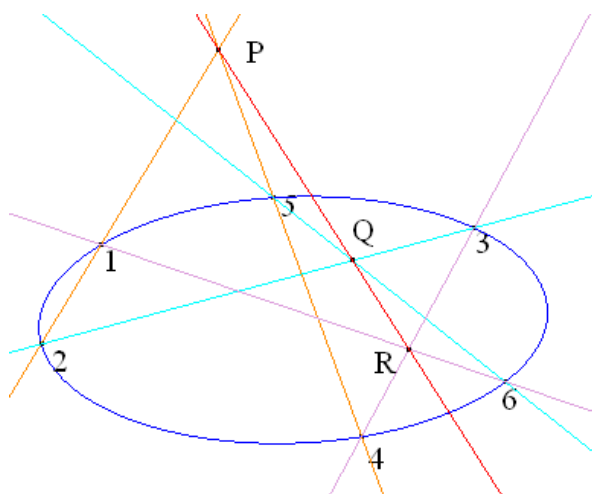
Body 1, 2, ..., 6 leží na téže kuželosečce právě tehdy, když průsečíky přímek

1, 2 a 4, 5 (průsečík P)

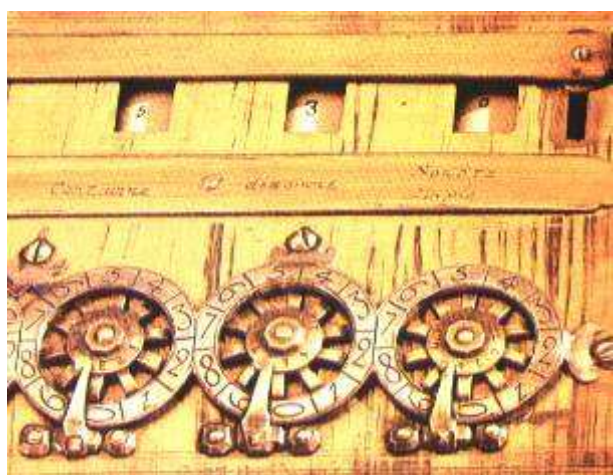
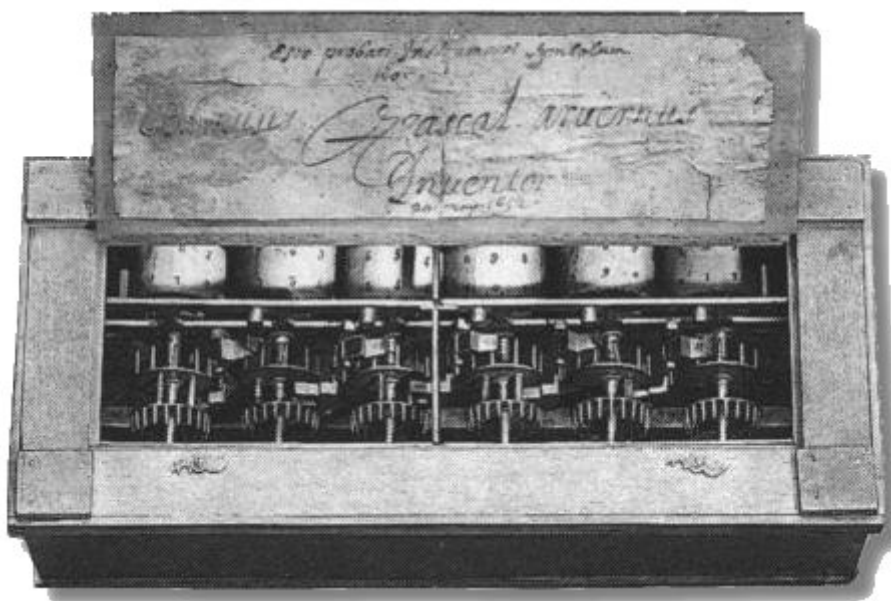
2, 3 a 5, 6 (průsečík Q)

3, 4 a 6, 1 (průsečík R)

leží na téže přímce p (tzv. Pascalově přímce)



V 19 letech (přesněji v období 1642 - 1645) zkonstruoval pro otce, aby mu usnadnil práci, počítačí stroj (tzv. pascaline), který vykonával 4 základní aritmetické úkony. Stroj postupně vylepšoval.



Jeho první fyzikální pokusy (kolem r. 1647) navázaly na Torricelliho pokusy se rtuťovou trubicí: ve Ferrandu a na blízkém Puy-de-Dome provedl za veřejné asistence řadu přesných srovnávacích měření rtuťového sloupce v různých nadmořských výškách a dokázal jednak možnost vakua, kterou starší fyzika popírala, jednak ukázal, že rtuťový sloupec podléhá pouze gravitaci a tlaku atmosféry. Další pokusy se týkaly spojitých nádob a šíření tlaku v kapalinách, kde formuloval tzv. Pascalův princip: tlak v kapalině se šíří všemi směry stejně. Na tom je založena celá hydraulická technika. Na jeho počest se proto jednotka tlaku nazývá Pascal.

Od mládí měl chatrné zdraví, trpěl různými bolestmi a roku 1647 na čas ochrnl. Roku 1654 se při jedné vyjízdce málem zabil, když se na mostě v splašili koně a jeho kočár zůstal viset na zábradlí; Pascal se zachránil, ale upadl na dva týdny do bezvědomí. Když koncem listopadu 1654 přišel k sobě, měl mystické vidění, z něhož si zapsal: „Oheň. Bůh Abrahamův, Izákův a Jákobův, ne Bůh filosofů a učenců...“ a věnoval se pak už jen filosofii a náboženství.

Seznamuje se s panem de Mere, člověkem vzdělaným a rozumným, ale trochu povrchním. De Mere psal Pascalovi dopisy o různých otázkách, včetně matematiky. Mimo jiné mu kladl otázky o pravděpodobnosti určitých situací při hře v kostky. Některé z těchto

problémů Pascal konzultoval s Fermatem v roce 1654. Jejich korespondence položila základ teorie pravděpodobnosti jako vědy.

Ve stejném roce 1654 publikoval Pascal „Traktát o aritmetickém trojúhelníku“, který se dnes nazývá Pascalovým trojúhelníkem, i když se ukázalo, že byl známý již v Starověké Indii. V knize byl poprvé zmíněn princip matematické indukce

Významné jsou Pascalovy práce z oblasti hydrostatiky. V práci „Pojednání o rovnováze kapalin“ formuloval základní zákon hydrostatiky, tzv. Pascalův zákon. Vyčíslil velikost hydrostatického tlaku, popsal hydrostatický paradox, zákon spojených nádob a princip hydraulického lisu.

Z matematiky se dále zabýval kuželovými plochami, vlastnostmi cykloidy, určováním objemů rotačních těles. Lze jej považovat za předchůdce Newtona a Leibnitze.

Vznik matematické analýzy

Za zakladatele infinitezimálního počtu jsou považováni Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibnitz.

Sir Isaac Newton (1643 – 1727),
anglický fyzik, matematik, astronom.

Vytvořil základy infinitezimálního počtu, klasifikoval křivky 3. stupně, pomocí Newtonových zákonů položil základy pozemské i nebeské mechaniky. Pomocí gravitačního zákona odstranil rozdíly mezi pozemskými a nebeskými jevy. Formuloval korpuskulární teorii světla, zkonstruoval zrcadlový dalekohled. Studium odporu kladeného prostředím pohybujícímu se tělesu položil základy hydrodynamiky



Isaac Newton se narodil na vesnickém panství v Woolsthorpe severovýchodně od Londýna. Jeho rodina vlastnila statek, který však nebyl dobrým zdrojem obživy. Navíc otec i dědeček zemřeli ještě před jeho narozením. Jeho matka se znovu provdala a odstěhovala se do blízké vesnice. O malého Newtona se starala jeho babička. Ve vesnické škole se naučil číst a psát a řadil se mezi průměrné žáky. Poté navštěvoval King's School v městečku Grantham, kam ho poslali ve dvanácti letech, ale ani zde příliš nevynikal. Našel podporu u svého strýce, který mu na jaře roku 1661 umožnil nastoupit do Koleje sv. Trojice (Trinity College) v Cambridge.

Jako chudý student si svůj pobyt v koleji odpracovával posluhami při jídle a drobnými pracemi pro starší členy koleje. Navštěvoval přednášky, hodně četl, rád experimentoval, avšak v kolektivu nevynikal. Přitom zvládal obtížná díla klasiků i současných autorů. Kromě matematiky a fyziky především teologické práce, díla z biblické historie a starých jazyků.

Newton se zde učil Aristotelově filozofii a od třetího roku studia si mohl do určité míry zvolit, co chce studovat. Rozhodl se pro studium filozofie Descarta, Gassendiho a Boylea.

Dále studoval novou algebru a analytickou geometrii Descarta a Wallise. Přitahovala ho také astronomie Galilea.

Trinity College Newton absolvoval v r. 1665 a v r. 1667 byl zvolen členem správní rady této univerzitní koleje. Mezi těmito dvěma daty došlo k epidemii moru, univerzita byla zavřena a Newton strávil 18 měsíců doma na vesnickém statku. Během této doby rozpracoval tzv. metodu fluxí (matematickou analýzu) a řadu konceptů, které později vedly k jeho slavným objevům v matematice a fyzice.

Roku 1669 byl jmenován profesorem a převzal od Barrowa katedru geometrie. Tehdy mu bylo 27 let. Newtonova první práce se týkala optiky. Během dvou let morové epidemie Newton zjistil, že světlo není jednoduchá entita. Když Newton nechal procházet sluneční světlo skleněným hranolem, objevil barevné spektrum. Newton došel k závěru, že bílé světlo je složeno z řady typů paprsků, které se lámou pod různými úhly, a proto každý typ těchto paprsků má jinou spektrální barvu a navrhl teleskop s použitím zrcadla. Za tento objev byl v roce 1672 přijat za člena Královské společnosti. V dalším se omezíme jen na jeho matematické výsledky.

Teorie fluxí. Newton rozlišoval:

Fluenty, což byly proměnné veličiny, které byly funkcemi jedné nezávisle proměnné – času. Například rychlost v , souřadnice x, y, z pohybujícího se bodu apod.

Fluxe byly rychlosti, s nimiž se fluenty mění. Od fluent je rozlišoval tečkou nad písmenem označujícím fluentu: $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$

Dále definoval **nekonečně malou veličinu** o a **momenty fluxí** $\dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \dots$

Základní úlohou bylo z daného vztahu pro fluenty najít vztah mezi fluxemi. To dělal v podstatě Fermatovou metodou.

Příklad. Platí

$$x^2 - axy = 0, \quad (1)$$

kde a je konstanta, x, y fluenty. Máme najít vztah pro fluxe.

Řešení podle Newtona: Jestliže fluenty x, y splňují vztah (1) v nějakém časovém okamžiku t , pak jej splňují i bezprostředně následujícím časovým okamžiku $t + o$. V tomto okamžiku jsou však jejich hodnoty $x + \dot{x}o$ a $y + \dot{y}o$, platí tedy

$$(x + \dot{x}o)^2 - a \cdot (x + \dot{x}o) \cdot (y + \dot{y}o) = 0.$$

Roznásobením dostaneme

$$x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}o \cdot \dot{x}o - axy - ax\dot{y}o - ay\dot{x}o - \dot{x}o\dot{y}o = 0.$$

Součet prvního a čtvrtého sčítance v posledním vztahu je podle (1) roven nule, a tak

$$2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}o - a(x\dot{y} + y\dot{x} + \dot{x}\dot{y}o) = 0.$$

Rovnici vydělíme veličinou o a pak v ní zanedbáme všechny nekonečně malé členy, tzn. výrazy, které obsahují veličinu o . Dostaneme

$$2x\dot{x} - a(x\dot{y} + y\dot{x}) = 0,$$

což z dnešního pohledu představuje derivaci explicitního vztahu (1).

Jak je vidět, Newtonovo pojetí infinitezimálního počtu vychází z potřeb fyziky. Derivaci Newton chápe jako okamžitou rychlost, s níž se daná veličina mění (změnu dané veličiny „za jednotku času“).

Gottfried Wilhelm Leibniz (též Leibnitz, 1646 – 1716), německý filozof, učenec, vynálezce a diplomat.

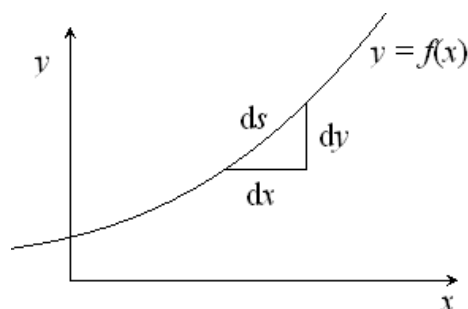
Syn váženého universitního profesora z Lipska. Promoval na doktora práv v Norimberku. Tam se seznámil s baronem Boineburgem a vstoupil do jeho služeb jako diplomat v Paříži, kde poznal slavného nizozemského matematika a fyzika Christiana Huyghense. Od roku 1676 byl dvorním knihovníkem v Hannoveru. Po vzoru Francouzské akademie věd prosadil v roce 1700 založení obdobné vědecké společnosti v Berlíně a stal se jejím prezidentem. Začal také studovat Pascalovy a Descartovy spisy. Na cestě do Anglie poznal i matematiky anglické. Jako filozof dovršil racionalistickou filosofii 17. století (reforma logiky, nomadologie, heuristika). Od mládí toužil vymyslet logický stroj, obecný myšlenkový algoritmus, umožňující najít takřka na každou otázku správnou odpověď. V matematice a s ní souvisejících oborech se to projevilo následovně:



1. Vynalezl počítačový stroj, který byl na rozdíl od Pascalovy kalkulačky založen na dvojkové číselné soustavě⁹. Ta se stala základem funkce dnešních počítačů.

2. Významně přispěl k rozvoji logiky. Je považován za zakladatele logicismu, filosofického směru, který chápe matematiku jako součást logiky¹⁰.

3. Nejvýznamnější byl jeho objev infinitezimálního počtu (v letech 1673-1676), nezávisle na Newtonovi. Základy diferenciálního počtu publikoval v roce 1684 v článku "*Nova Methodus pro Maximis et Minimis...*" v časopise *Acta Eruditorum*, který sám založil v Lipsku o dva roky dříve. Jeho přístup je geometrický. Pro velmi malé přírůstky proměnných x , y , (tzv. diferenciály) za-



Obr. 1

vedl označení dx , dy apod. Užíval tzv. *charakteristický trojúhelník* (obr. 1), který se však objevil již dřívejších pracích (Pascal, Barrow). Popis je suchý, nejasný a bez důkazů. Leibniz pracuje spíše s diferenciály než s derivací, Uvádí pravidla $d(uv) = udv + vdu$,

$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$, podmínku $dy = 0$ pro lokální extrém, pro inflexi pak $d^2y = 0$.

⁹ Poznamenejme, že jako první užíval dvojkovou soustavu F. Bacon, ale systematicky ji propracoval až Leibniz. Prudký rozmach jejího používání přišel s nástupem počítačů, protože informace lze zakódovat pomocí konečné posloupnosti čísel 0 a 1 a realizovat v počítači schématem: 0 - neprochází el. proud, 1 - prochází el. proud.

¹⁰ V dnešní době je logicismus jedním z tří směrů, které se snaží vyřešit tzv. třetí krizi matematiky.

V roce 1686 publikoval další práci, v níž seznamuje s pravidly integrálního počtu. Užívá symbol $\int$. Délku křivky vyjadřuje jako součet elementů $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ve tvaru $s = \int_a^b \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$.

Následujícího roku byla publikována Newtonova zásadní práce „*Principia*“. Newton svoji metodu "fluxí" dokončil v roce 1671, ale nepodařilo se mu ji publikovat tiskem, dokud ji v roce 1736 nepřeložil John Colson z latiny do angličtiny. Došlo ke sporu mezi Leibnizem a Newtonem. Slavný anglický fyzik se totiž formálně dopracoval k týmž výsledkům, avšak jinou metodou. Přistupoval ke problémům z fyzikální stránky. Pracoval se závislostí veličin na čase, dospěl k derivacím a integrálům, avšak jeho méně přehledná symbolika se neujala. Dnešní symbolika, stejně jako názvy „calculus differentialis“ a „calculus integralis“ pocházejí od Leibnize.

Leibnizovy práce zaujaly bratry Bernoulliovy, kteří jeho metody nadšeně přijali a rozvinuli. První učebnice diferenciálního a integrálního počtu pochází od markýze de l'Hospitala, žáka Johana Bernoulliho.

Jacob Bernoulli (1654-1705), švýcarský matematik a fyzik.

Podle přání svého otce se měl stát pastorem, vystudoval tedy filozofii a teologii. Více se však věnoval matematice, fyzice a astronomii. Během svých studijních pobytů v Ženevě a Paříži, Nizozemí a Anglii si vytvořil řadu kontaktů s předními přírodovědci Robertem Boylem a Robertem Hookem. Od roku 1683 přednášel experimentální fyziku v Basileji a v roce 1687 se zde stal profesorem matematiky. Spolu se svým bratrem Johannem položil základy diferenciálního a integrálního počtu. V letech 1684 až 1686 napsal čtyři články o logice, jeden o pravděpodobnosti a spolu s německým učencem G. Leibnitzem zavedl v této oblasti terminologii. Posmrtně, v roce 1713, byla vydána práce *Ars conjectandi* (Umění předpokládat), kterou nedokončil. Kniha se zabývá pravděpodobností a logikou, je tu zmínka o zákonu velkých čísel, vlastnostech čísel později nazvaných Bernoulliho čísla. V letech 1689 až 1704 se zabýval teorií řad, publikoval důkaz divergence harmonické řady, využíval mocninné řady k výpočtům délek křivek a obsahů ploch. Na jaře roku 1692 objevil a o dva roky později publikoval "zlatou větu" - vzorec pro poloměr křivosti v bodě křivky. Stal se také průkopníkem variačního počtu rozvinutého o půl století později L. Eulerem.



Johann Bernoulli (1667-1748), švýcarský matematik a fyzik.

S bratrem Jacobem propracoval infinitezimální počet. Zabýval se hodně studiem křivek. Díky svému příspěvku k řešení problému brachystochrony bývá považován za zakladatele variačního počtu. Brachystochrona je křivka, po níž urazí hmotný bod nejrychleji vzdálenost mezi dvěma body v gravitačním poli.



Daniel Bernoulli (1700-1784), syn Johanna Bernoulliho. Otec chtěl, aby se Daniel věnoval obchodu, ten však nakonec vystudoval v Basileji medicínu, během pobytu v Miláně vydal svou první matematickou práci a byl pozván na univerzitu do Petrohradu. Tam učinil řadu významných objevů. Matematicky popsal kmitání strun, vytvořil významnou práci z teorie pravděpodobnosti a své nejvýznamnější dílo o hydrodynamice (zákony pohybu proudící kapaliny - Bernoulliova rovnice), které však vyšlo až v roce 1738. Daniel se v Petrohradě necítil šťastně navzdory plodné spolupráci s Eulerem. V roce 1733 odtud odešel a od roku 1734 působil na universitě v Basileji. Ovlivněn otcem zde přednášel botaniku a později fyziologii. Významných výsledků však dosáhl v matematické fyzice, hydrodynamice a astronomii.



Mikuláš Bernoulli (1695-1726), syn Johanna Bernoulliho (a bratr Danielův). Zabýval se diferenciálními rovnicemi a teorií pravděpodobnosti. S Danielem odcestoval koncem roku 1725 do Petrohradu, kde po osmi měsících pobytu zemřel.

Leonhard Euler (1707-1783), švýcarský vědec, nejvýkonnější matematik 18. století. Pochází z Basileje, jeho otec studoval matematiku u Jakoba Bernoulliho, Leonhard byl žákem Johanna Bernoulliho. NA univerzitě v Basileji studoval původně teologii. Studium ukončil v roce 1726, přičemž ještě stačil prostudovat mnoho matematických prací. Téhož roku mu vyšel první matematický článek v odborném tisku a o rok později další. V roce 1727 se zúčastňuje prestižní soutěže o Velkou cenu pařížské Akademie. Soutěž sice nevyhrál, ale byl druhý, což byl pro mladého absolventa velký úspěch.



Téhož roku mu bylo nabídnuto místo na Akademii věd v Petrohradu, kde pak působil až do roku 1741. Poté pracoval 25 let v berlínské Akademii věd a od roku 1766 opět v Petrohradu. Během 25 let strávených v Berlíně napsal kolem 380 článků. Po návratu do Ruska jeho dům zničil v roce 1771 požár. O něco později částečně, a nakonec úplně oslepl. V této slepotě vytvořil téměř polovinu svých prací (přitom např. jenom práce o měsíčním pohybu měla 775 stránek), kterých bylo více než 800.

Euler přispěl významnými objevy ke všem odvětvím matematiky. Ohromná autorita jeho učebnic ustálila symboliku algebry a infinitezimálního počtu. Chápání goniometrických funkcí jako poměrů a jejich dnešní zápis pochází od něj. Euler sepsal velice kvalitní učebnice matematické analýzy. Všechny jeho práce se snadno studují, protože jsou psány jednoduchým a výstižným stylem. Systematicky popsal a rozšířil poznatky o nekonečných řadách včetně rozvoju funkcí e^x , $\sin x$, $\cos x$ apod., dospěl ke vztahu $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, analyticky popsal řadu křivek a ploch, rozvedl teorii diferenciálních rovnic, jsou známy Eulerovy integrály, provedl první zpracování variačního počtu. V řadě drobných prací došel významných objevů i v elementární matematice, jako je například Eulerova přímka, vztah mezi počtem vrcholů, hran a stěn konvexního mnohostranu ($v + h = s + 2$), řešení problému mostů města Královce.

Ve fyzice popsal podrobně mechaniku pevných těles (Eulerova rovnice pro rotaci tělesa kolem bodu, zavedl též moment setrvačnosti tělesa), popsal pohyb Měsíce jako speciální případ tzv. problému tří těles, napsal knihy o hydraulice, stavbě lodí, balistice, podal teorii průchodu paprsků soustavou optických čoček, novou matematickou teorii hudby.

Den 18. září 1783 prožíval **Euler** zpočátku jako obvykle. Dával hodinu matematiky svému vnuku, pak dělal výpočty křídou na tabuli o pohybu balonů a diskutoval o právě objevené planetě Uran. Kolem páté hodiny odpoledne se mu udělalo nevolno. Stačil ještě říci „umírám“ a ztratil vědomí. Zemřel kolem 11 hodiny večer. Petrohradská Akademie ještě 50 let pokračovala ve vydávání jeho dosud nepublikovaných děl . . .

Druhá krize matematiky

V roce 1734, sedm let po Newtonově smrti, napsal irský biskup *Georgie Berkeley* knihu „*Analytik, čili rozprava určená nevěřícímu matematikovi*“. V ní byl podniknut velmi ostrý útok proti Newtonovým manipulacím s veličinou o , jejíž druhé a vyšší mocniny při úpravách beztretně mizely, stejně jako libovolné nenulové konečné veličiny jí vynásobené, z rovnic, aniž se rovnost narušila. Ony „nekonečně malé veličiny“ byly podle něj „duchové zemřelých veličin“ s nimiž matematici zachází, jak se jim to zrovna hodí.

D'Alembert se jako první matematik pokusil odůvodnit mystický *Newtonův – Leibnizův* počet pomocí rigorózní teorie limit. Snažil se odůvodnit infinitezimální počet bez použití vnitřně rozporného pojmu, kterým je aktuálně nekonečně malá. Ostře vystupuje proti těmto nekonečně malým, ať mají podobu *Newtonových momentů* nebo *Leibnizových diferenciálů*. Především ostře odmítá scholastické vymezení nekonečně malé jako přechodného stavu mezi konečnou veličinou a nulou.

D'Alembert nemluví v newtonovském smyslu o posledním poměru mizejících veličin, ale zásadně o limitě poměru konečných veličin, tj. vyhýbá se aktuálně nekonečně malým veličinám obsaženým v čitateli a jmenovateli limitovaného poměru. *D'Alembert* sestavuje poměr konečných veličin $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a definuje diferenciální koeficient $\frac{dy}{dx}$, potřebný pro hledání tečny křivky jako $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

D'Alembert tedy neoperuje s diferenciály izolovaných veličin jako *Leibniz*, ale zásadně s diferenciálními koeficienty $\frac{dy}{dx}$ (dnes říkáme s derivacemi, ale *d'Alembert* nikdy tohoto výrazu nepoužil). Diferenciální koeficient chápal jako nedílný celek, který již není ani nekonečně malou a ani zlomkem s nekonečně malými, ale je zásadně limitou poměru konečných veličin.

Samotná proměna „ Δy v dy ... se vyskytuje teprve jako poslední výsledek vývoje nebo přinejmenším těsně před uzavřením brány, zatímco se u mystiků a iniciátorů počtu objevuje jako východisko.“

D'Alembertův výpočet diferenciálního koeficientu pro $y = x^3$ můžeme rozdělit do těchto fází:

1. Sestrojíme poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x, \Delta x \neq 0. \quad (1)$$

V limitním procesu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ levá strana přechází v diferenciální koeficient $\frac{dy}{dx}$ a pravá strana

představuje završení limitního procesu ve výrazu $3x^2$. Akt završení se uskuteční prostým dosazením $\Delta x = 0$. V d'Alembertově operaci se dělí oprávněně ($\Delta x \neq 0$), Δx se k nule ještě nedostalo. Dělí se číslem, které se k nule přibližuje a až pak se stanovuje limita završením celého procesu položením $\Delta x = 0$. Touto procedurou byla stanovena skutečná hodnota neurčitého výrazu typu $\frac{0}{0}$. Toto d'Alembertovo pojetí infinitesimálního počtu lze

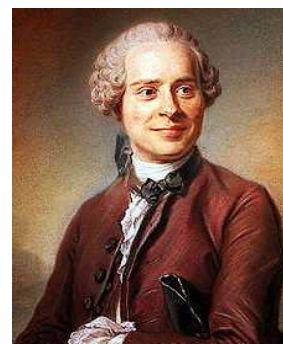
považovat za důležitý krok k vyřešení tzv. druhé krize matematiky. Nedostatkem těchto úvah byl intuitivní pojem limity. Přesné vymezení pojmu limity provedl **Bernard Bolzano** roku 1817, avšak jeho práce zůstala neznámá. **Definitivní vyřešení druhé krize matematiky** se proto přisuzuje **Karlu Weierstrassovi**, který zavedl roku 1838 epsilon - delta definici limity:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \neq a$, pro něž $|x - a| < \delta$, platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Hovoří se o nástupu racionálního období infinitesimálního počtu, které je charakterizováno ústupem ze světa aktuálního nekonečna a přechodem do světa, který je řízen kategorií potenciálního nekonečna.

Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717 –1783), francouzský matematik a fyzik a filosof, člen francouzské, berlínské a petrohradské akademie věd.

D'Alembert byl nemanželským dítětem a jako takový byl nalezen na schodech kostela St Jean Le Rond, podle kterého dostal své jméno. Jeho otec Louis-Camus Destouches (dělostřelecký důstojník, který byl v době jeho narození mimo Francii) se však k němu přihlásil a zajistil jeho výchovu a vzdělání. Za svých studií přijal jméno Jean-Baptiste Daremberg, které později změnil na "francouzštější" d'Alembert. Stal se advokátem, i když jej to stále více táhlo k matematice. V roce 1741 byl přijat do Pařížské akademie věd za své práce o integrálním počtu. Zhruba po pěti letech začal spolupracovat s Diderotem na jeho projektu Encyklopedie, do níž sepsal řadu článků o matematice, fyzice a astronomii. Zemřel v Paříži a protože byl bezvěrec, byl pohřben v neoznačeném hrobě.



Zabýval se mechanikou, teorií gravitace a pohybem nebeských těles, diferenciálním počtem a rovnicemi a jejich aplikacemi ve fyzice, napsal například práci o větrech v atmosféře nebo o kmitání struny. Zvláště významné jsou jeho články v Encyklopedii, které se zabývají limitami ve 4. svazku, kde je vidět, že d'Alembert chápal význam funkcí pro matematiku.

Karel Weierstrass (1815 – 1897), německý matematik, často nazývaný „otec moderní matematické analýzy“

Byl synem úředníka. Ač získal studiem matematické znalosti, jakých by se nenadál, a byl schopen dát matematiké vzdělání svému mladšímu bratrovi, jeho otec si přál aby studoval finančnictví, a tak Karl nastoupil na Univerzitu v Bonnu studovat právo, finance a ekonomii. Na kariéru v pruské administrativě to byla vskutku dobrá volba vzdělání, ale Karl nesmírně trpěl rozkolem mezi poslušností k otci a tajným studiem svého milovaného předmětu – matematiky. Výsledkem bylo, že Karl propadl u obého a začal studovat matematiku sám – čtením Laplaceovy mechaniky a poté Jacobiho prací o eliptických funkcích, kterým propadl do konce života.

Po dalším studiu se nakonec stal učitelem na gymnáziu. Po devíti letech praxe začal trpět sérií vážných nemocí, která trvala asi dvanáct let a značně mu ztrpčovala práci. V roce 1854 publikoval *Zur Theorie der Abelschen Functionen*, díky čemuž získal místo na Univerzitě v Breslau. Publikoval teorii hypereliptických integrálů, což mu vyneslo nabídky mnoha univerzit. Přijal místo profesora na Berlínské univerzitě, sjížděli se za ním studenti z celého světa. Nesloužilo mu však zdraví. Roku 1861 zkolaboval a trvalo mu rok, než byl opět schopen učit. Poslední léta svého života byl připoután k invalidnímu vozíku. Zemřel na zápal plic.



Vznik moderní algebry

Neils Henrik Abel (1802 – 1829), syn norského pastora, samouk 1822 – Universita v Christiani (nyní Oslo)

1823 – domníval se, že našel obecnou metodu řešení algebraických rovnic 5. stupně

1824 – poznal své chyby a jako první na světě dokázal, že není možné obecně řešit rovnice 5. stupně. Získal stipendium, navštívil Berlín, Paříž. Bylo pro něj velkým zklamáním že August Cauchy odmítl jeho návštěvu. Významné jsou Abelovy práce z teorie eliptických integrálů (Abelův theorem) a komplexních čísel. Po návratu z Paříže do Christianie byl těžce nemocen a bez prostředků. Roku 1829 umřel ve věku 27 let.



Evariste Galois (1811-1832) Syn starosty města Bourg-la-Reine. Evariste byl, podobně jako jeho otec, republikán život výrazně ovlivnily praktické události doby (Napoleon, Ludvík 18., Karel 10.)

Do dvanácti let se vzdělával doma, poté navštěvoval lyceum Ludvíka Velikého, V roce 1827, když musel opakovat ročník, se začal věnovat matematice a rychle se v ní zdokonaloval. V roce 1828 se přihlásil na Exile Polytechnique, ale nebyl přijat. Vrátil se na lyceum, kde zanedbával studium na úkor samotného studia matematiky



V roce 1829 publikoval několik článků v Annales de mathématiques. V téže roce spáchal jeho otec sebevraždu a Evariste nebyl opět přijat na polytechniku. Začal studovat na École Normale. Posílá nový článek o teorii rovnic a dovídá se o Abelových a Jacobiho pracích.

1830 – publikoval 3 články ale hlavní práce zasláná akademii vůbec nebyla posuzována. Cena akademie byla udělena Abelovi a Jacobimu. V červnu vypukla revoluce. Galois byl vyloučen ze školy.

1831 – Galois byl vyzván Poissonem, aby publikoval třetí verzi své práce. Z politických důvodů byl uvězněn a zanedlouho propuštěn. Dobytí Bastilly, Galois znovu uvězněn, pokusil se o sebevraždu

1832 – Onemocněl a byl převezen do pensionu zamiloval se do Stephanie-Felicie Poterine du Motel, lékárníkovy dcery. V dubnu byl propuštěn, 30. května jej vyzval d'Herbinville na souboj pod záminkou, že svedl Stephanie, údajně d'Herbinvillovu snoubenku. V noci před soubojem napsal dopis na rozloučenou, v němž připomenul své nejvýznamnější matematické objevy. V souboji byl těžce zraněn a 2. června zemřel (ve věku 21 let, přičemž se matematikou zabýval 5 let).

Teorie grup - spis zasláný před soubojem s žádostí o veřejné předložení Gaussovi a Jacobimu.

Teprve 14 let po Galoisově smrti, v roce 1846, byly jeho práce publikovány Josephem Liouvillem. Uznání dosáhly ještě později, v devatenáctém století. Francouzský matematik Camille Jordan (1838-1922) prozkoumal jeho práce a v roce 1870 vydal o nich obsáhlou knihu s podrobným komentářem.

O životě Evarista Galoise napsal Leopold Infeld (polský fyzik a Einsteinův spolupracovník) román, který vyšel v roce 1952 v češtině pod názvem *Vyvolenci bohů*.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 1855), německý matematik a fyzik. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů vědění.

Narodil se v Braunschweigu (česky Brunšvik v dnešním Dolním Sasku), jako jediný syn chudých rodičů. Koluje několik historek o jeho brzké genialitě a o všech se dá pochybovat. Podle jedné z nich se jeho nadání projevilo už ve věku tří let, kdy opravil chybu svého otce při počtech. Jiným známým příběhem je epizoda s učitelem J. G. Büttnerem na základní škole, který svým žákům zadal, aby se pokusili spočítat součet všech čísel od 1 do 100. Mladý Gauss odpověděl během chvilky, neboť si uvědomil, že sečtením opačných prvků z řady čísel dostane vždy stejný výsledek: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, atd., což dohromady dává $50 \times 101 = 5050$.



V roce 1788 (v jedenácti letech) Gauss začal studovat na gymnáziu. Otec chtěl, aby syn šel v jeho šlépějích a stal se tak kameníkem. Nebyl tedy nadšený, že Gauss studuje matematiku a vědy. Gaussu hlavně podporovala matka a Karel II., vévoda brunšvický, který udělil Gaussovi stipendium na Collegium Carolinum a poté mu umožnil studium na univerzitě v Göttingenu, kde dále studoval od roku 1795 do roku 1798.

Průlom nastal v roce 1796, kdy se mu podařilo ukázat, že každý pravidelný n -úhelník je eukleidovsky sestrojitelný, právě když n je Fermatovo prvočíslo (posléze dokázal že n může být i součin několika různých Fermatových prvočísel a mocniny čísla 2) To byl velký objev z pohledu matematiky.

Téhož roku objevil aritmetiku zbytkových tříd a zjednodušil tak výpočty v teorii čísel, také objevil, že každé kladné celé číslo jde vyjádřit jako součet nejvíce tří trojúhelníkových čísel.

Mezi jeho stěžejní díla patří spis, který napsal již ve věku 21 let (1798) . Tato práce položila základy teorie čísel jakožto matematické disciplíny.

Roku 1799 podal v disertační práci důkaz základní věty algebry. Gaussova disertační práce kritizovala d'Alembertův důkaz, ale jeho vlastní důkaz nebyl přijat, protože používal dosud nedokázanou Jordanovu větu. Gauss během svého života přišel ještě s třemi dalšími důkazy základní věty algebry, pravděpodobně díky odmítnutí jeho disertační práce. Poslední důkaz z roku 1849 je považován za matematicky rigorózní i z pohledu dnešních matematických standardů. Jeho důkazy značně objasnily chápání komplexních čísel.

Gauss také udělal obrovský pokrok v teorii čísel díky knize *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), která obsahovala předvedení aritmetiky zbytkových tříd a také první důkaz zákona o kvadratické reciprocitě. V ten rok (1801) italský astronom Giuseppe Piazzi objevil trpasličí planetu Ceres, ale byl schopen ji sledovat jen pár dnů. Gauss přesně předpověděl pozici, na které se bude znovu nacházet, a tak mohla být a byla v dalších dnech znovu pozorována. Roku 1807 se stal profesorem astronomie a ředitelem hvězdárny v Göttingen. Na tomto místě působil po zbytek jeho života.

Piazzioho objev Cereše přivedl Gausse k teorii o pohybu planetek ovlivňovaných velkými planetami. Svůj postup, který v mnohém zjednodušil metody výpočtu drah těles v 18. století, publikoval později jako *Teorie o nebeském pohybu*. Postup je základním kamenem výpočtů i v dnešní době. Přišel s Gaussovou gravitační konstantou a obsahoval mocnou metodu nejmenších čtverců, metoda, která se používá ve všech odvětvích vědy k minimalizaci chyby měření.

V roce 1818 Gauss předvedl své početní schopnosti prakticky, když uskutečnil geodetický průzkum státu Hannover a navázal tak na předešlé dánské průzkumy. Aby si pomohl v průzkumu vynalezl Gauss heliotrop, nástroj který odráží sluneční paprsky na velkou vzdálenost a pomáhá tak určit pozici.

Gauss také tvrdil, že objevil možnost neeuklidovské geometrie, ale nikdy ji nepublikoval. Průzkum Hannoveru později vedl k objevení gaussovského rozdělení, známého jako normální rozdělení, které popisuje chyby měření. Navíc nasměrovalo to Gaussův zájem k diferenciální geometrii. V tomto oboru zavedl tzv. vnitřní geometrii plochy, pomocí níž můžeme pracovat s křivočarými souřadnicemi na ploše, a objevil důležitou větu, *theoremum egregium*, která tvrdí, že úhrnná křivost plochy je invariantní vůči ohýbání.

V roce 1831 Gauss navázal plodnou spolupráci s profesorem fyziky Wilhelmem Weberem. To vedlo k novému pochopení magnetismu (včetně nalezení jednotky magnetismu v závislosti na hmotě, velikosti a času) a objevení Kirchhoffových zákonů. Gauss s Weberem zkonstruovali v roce 1833 první elektromagnetický telegraf, který spojoval hvězdárnu a institut fyziky v Göttingenu (1,2km). Gauss nechal v zahradě hvězdárny vybudovat magnetickou observatoř a zároveň s Weberem založili *magnetischer Verein* („magnetický klub“), který podporoval měření zemského magnetismu v různých částech světa. Vytvořil metodu měření horizontální intenzity magnetického pole, která se s úspěchem používala až do druhé poloviny 20. století. Na jejím základě bylo možné dojít s matematickou teorií, která oddělila vnitřní (jádro a kůra) a vnější (magnetosféra) zdroje magnetického pole Země. Na Gaussovu památku byla pojmenována jednotka magnetické indukce Gauss.

Vznik neeukleidovských geometrií, axiomatická výstavba geometrie

Pokus o první axiomatickou výstavbu matematiky provedl Eukleides ve svých Základech (kolem r. 300 p.k.) Nejprve pomocí názoru definoval základní pojmy a vztahy mezi nimi. Poté uvádí pět **axiomů (postulátů¹¹)** - základních vět, které předkládá jako jednoznačné pravdy reálného světa, plynoucí ze zkušenosti. Poslední, pátý axiom zní:

A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsou do nekonečna že se sbíhají¹² na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

Tento postulát se pozdějším generacím matematiků zdál být závislý na předchozích postulátech. Je známa celá řada jeho „důkazů.“ Všechny však mají na některém místě logickou chybu, autor se opírá o nedokázanou vlastnost, která se zdá být zřejmá z názoru. Dnes již víme, že tento postulát je v Eukleidově konstrukci geometrie nezbytný.

Někteří matematici se snažili usnadnit důkaz pátého axiomu tím, že dokazovali tvrzení, které je s 5. axiomem ekvivalentní mezi taková tvrzení patří i tato věta, označovaná dnes jako Eukleidův axiom¹³:

Nechť p je libovolná přímka a P bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené bodem P a přímkou p existuje nejvýš jedna přímka rovnoběžná s přímkou p .

Když nešlo dokázat 5. postulát přímo, zkoušeli matematici provést důkaz nepřímo: Nahradili jej jiným, který tvrdil opak, a zkoušeli z tohoto nového axiomatického systému vybudovat novou geometrii, analogickou geometrii Eukleidovské. Očekávali, že se z tohoto axiomatického systému podaří odvodit větu, která je ve sporu s nějakým axiomem nebo s již dříve odvozenou větou. Mezi nejvýznamnější z těchto pokusů v 18. století patří práce Girolama Saccheriho z roku 1733 a Lambertova¹⁴ „*Teorie rovnoběžných přímek*“ (1766).

Úsilí vyvrcholilo v 19. století objevem neeukleidovských geometrií a poznatkem, že matematickou teorii lze vybudovat z každé soustavy axiomů, která splňuje jisté obecné požadavky. Vznik neeukleidovských geometrií je spjat se třemi jmény: Gauss, Bolyai a Lobačevskij.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) se již jako patnáctiletý snažil dokázat 5. postulát. V roce 1817 dospěl k názoru, že je postulát nezávislý na ostatních čtyřech a studoval důsledky geometrie, v níž může být bodem neležícím na dané přímce vedeno několik rovnoběžek s touto přímkou. Zmínil se o tom jen v dopisech přátelům, ale nikdy nic nezveřejnil. Patrně se bál kritiky a nepochopení ze strany ostatních matematiků, neboť v té době nebyl snad nikdo ochoten vzdát se eukleidovské geometrie a připustit, že může platit jiná.

¹¹ Eukleides je nazývá „*úkoly prvotné*“ – nerozlišuje matematické věty od úloh (důkazových, konstrukčních).

¹² z hlediska dnešních představ: protínají se na té straně ...

¹³ Jiné tvrzení ekvivalentní s 5. axiomem: Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je π . Dokázal Legendre.

¹⁴ Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) na rozdíl od Saccheriho netvrdí, že 5. postulát dokázal. Má velkou zásluhu na konečném vyřešení problému 5. axiomu, podstatě vytvořil základy absolutní geometrie (viz str. 6).

Nikolaj Vasiljevič Lobačevskij předložil roku 1826 fyzikálně-matematickému oddělení kazaňské univerzity „*Krátké pojednání o základech geometrie s přesným důkazem teorie rovnoběžných přímek*.“ Byla to francouzsky psaná práce, která je spojena se zrodem neeukleidovské geometrie. Jeho první tištěná práce o neeukleidovské geometrii byla psána rusky a vyšla v roce 1829. Pátý postulát Lobačevskij nahradil tvrzením, že *v rovině určené bodem A a přímkou p existují aspoň dvě různé přímky, které procházejí bodem A a neprotínají přímku p*. Z takto získané soustavy vytvořil novou ucelenou geometrickou teorii. Až v roce 1833, byl vydán její německý překlad, a tak práce pronikla do Evropy. Setkala se s naprostým nepochopením. Nepříznivé ohlasy způsobily, že Lobačevskij přišel o místo rektora univerzity v Kazani i o řád sv. Anny II. třídy, což bylo nejvyšší vyznamenání dostupné lidem, kteří nebyli členy carské rodiny. Lobačevskij podrobně rozpracoval svou teorii v celé řadě dalších prací.

Janos Bolyai byl maďarský důstojník, syn matematika Farkase Bolyaie. Došel k podobným závěrům jako Lobačevskij, aniž by znal jeho práci. Své výsledky publikoval na 24 stranách jako appendix v otcově knize v roce 1832. Otec napsal svému příteli Gaussovi dopis s dotazem, jak se má k synovým neortodoxním myšlenkám zachovat. Gauss, který si Janosovu práci prostudoval, odpověděl otci, že jeho syn je génius prvního řádu. Připojil však poznámku, že jemu samotnému jsou tyto myšlenky již dávno známé, a tak by pochvala z jeho strany znamenala sebechválu. Janos byl Gaussovou odpovědí velmi zklamán. Myslel si, že si slavný matematik a přítel rodiny Bolyaiů přivlastnil jeho myšlenky. Navíc se všude setkával s nepochopením a po německém vydání Lobačevského práce klesl na duchu a již nikdy nic z matematiky neuveřejnil.

Přijetí neeukleidovských geometrií matematickou veřejností znamenalo převrat v pojetí matematiky jako celku. Vědci si uvědomili, že eukleidovský přístup ke geometrii se příliš opíral o názor, což v jistém smyslu brzdilo po mnoho let vývoj matematiky. Začalo se prosazovat, že názor v matematice je škodlivý a že matematické teorie se musí budovat axiomaticky, přísnou logikou oproštěnou od názoru.

Axiomatická výstavba matematické teorie má obsahovat:

1. výčet skupiny základních objektů,
2. uvedení základních vztahů mezi těmito objekty,
3. skupinu axiomů (základních vět, jejichž pravdivost přijímáme).

Soustava axiomů musí být:

- **bezesporná**, tj. nesmí z ní být možné odvodit větu a zároveň její negaci,
- **nezávislá**, žádný axiom nesmí být odvoditelný z ostatních axiomů,
- **úplná**, matematická teorie je pomocí pravidel logiky vybudována jen z těchto axiomů.

Roku 1899 publikoval David Hilbert dílo *Grundlagen der Geometrie*, které je základem nového pohledu na geometrii jako abstraktní disciplínu, v níž geometrické pojmy nemusí mít žádný konkrétní význam, ale jsou pouhými proměnnými v axiomatické konstrukci.

Hilbertovy axiomatické definice základních geometrických pojmů:

Jako primitivní pojmy zavedeme prvky tří množin B , P , R , a tři relace ε , μ , $=$, přičemž prvky množiny B budeme nazývat *body*, prvky množiny P *přímky* a prvky množiny R nazveme *roviny*. Body budeme též nazývat prvky *lineární geometrie*, body a přímky jsou prvky *rovinné geometrie* a body, přímky a roviny jsou prvky *prostorové geometrie*. Relaci ε nazýváme incidence a místo spojení „bod A je incidentní s přímkou p (resp. s rovinou α)“ budeme říkat „bod A leží na přímce p (resp. v rovině α)“ nebo „přímka p (resp. rovina α) prochází bodem A “. Jestliže každý bod přímky p leží v rovině α , říkáme, že „přímka p je incidentní s rovinou α “ nebo „ p leží v α “ nebo „rovina α prochází přímkou p “. Body A , B , C nazveme *kolineární*, jestliže leží na téže přímce. Neleží-li na téže přímce, nazýváme je *nekolineární*. Body A , B , C , D nazveme *komplanární*, leží-li v téže rovině. Neleží-li v téže rovině, nazýváme je *nekomplanární*.

Relace $\approx$ představuje shodnost, μ je relace uspořádání. Výše zmíněné prvky a relace splňují následující axiomy, které jsou rozděleny do pěti skupin (celkem 19 axiomů): axiomy incidence - **I** (původně je nazval axiomy spojování), uspořádání - **U**, shodnosti - **S**, Spojitosti - **A** a axiom rovnoběžnosti.

První čtyři skupiny axiomů vytváří tzv. *absolutní geometrii*. Axiom rovnoběžnosti lze formulovat třemi způsoby, a tak z absolutní geometrie vznikají tři různé matematické disciplíny:

1. **Parabolická geometrie** je **eukleidovská geometrie**, kterou známe ze školy. Dostáváme ji ze systému **[I, U, S, A, E]**, kde **E** je tzv. **Euklidův axiom**:

E. (Euklidův axiom) Necht' p je libovolná přímka a P bod, který na ní neleží. Pak v rovině určené bodem P a přímkou p existuje nejvýš jedna přímka, která nemá společný bod s přímkou p .

Tvrzení ekvivalentní s axiomem E:

- (E1) Existuje aspoň jeden trojúhelník, v němž je součet velikostí vnitřních úhlů π .
- (E2) Součet velikostí vnitřních úhlů v každém trojúhelníku je roven π .
- (E3) Existuje aspoň jeden obdélník.
- (E4) Existuje aspoň jedna přímka p a bod $A \notin p$ s takovou vlastností, že v rovině pA existuje nejvýš jedna přímka, která prochází bodem A a neprotíná p .
- (E5) Každým vnitřním bodem dutého¹⁵ úhlu je možné vést přímku, která protíná obě ramena úhlu v jejich vnitřních bodech.
- (E6) Existují dva trojúhelníky, které se shodují ve vnitřních úhlech a přitom nejsou shodné.

¹⁵ Dutým, resp. konvexním úhlem v celém textu rozumíme úhel o velikosti, která je větší než 0 a menší než π .

(E7) Množinou všech bodů, které leží v dané polorovině s hraniční přímkou p a mají od p pevně danou vzdálenost, je přímka.

(E8) Každými třemi nekolineárními body je možné proložit kružnici.

2. **Hyperbolická geometrie** nazývaná také **Lobačevského geometrie** je dána systémem $[I, U, S, A, L]$, kde L je Lobačevského axiom:

L. (Lobačevského axiom) Existuje přímka p a bod $A \notin p$ tak, že v rovině určené bodem A a přímkou p existují aspoň dvě různé přímky, které procházejí bodem A a neprotínají přímkou p .

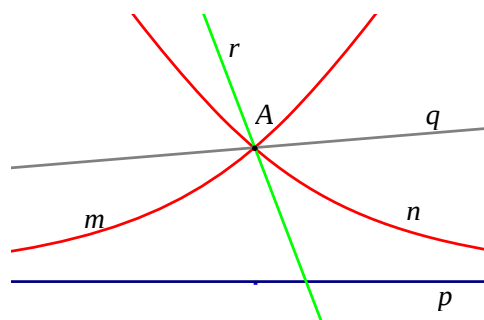
3. **Eliptická (Riemannova) geometrie** vznikne, když k systému $[I, U, S, A]$ přidáme **Riemannův axiom**:

R. (Riemannův axiom) Libovolným bodem $A \notin p$ neprochází ani jedna přímka, která by neprotínala přímkou p a přitom ležela v rovině určené bodem A a přímkou p . (Jinak: Každé dvě přímky, které leží v téže rovině, se protínají).

Eliptická a hyperbolická geometrie jsou tzv. **neeuclidovské geometrie**.

Některé základní vlastnosti Lobačevského rovinné geometrie

- (L01) Součet velikostí vnitřních úhlů každého trojúhelníka je menší než π .
- (L02) Existují trojúhelníky které mají různé součty velikostí vnitřních úhlů.
- (L03) Mají-li dva trojúhelníky shodné odpovídající si úhly, pak mají shodné i odpovídající si strany. (Neexistují podobné trojúhelníky s koeficientem podobnosti $k \neq 1$.)
- (L04) Bodem A , který neleží na dané přímce p lze vést právě dvě různé přímky m, n , které se k přímce p asymptoticky blíží. Říkáme, že přímky p, m (resp. p, n) jsou **souběžné přímky** (**souběžky**). Souběžnost přímek je určena jednak daným smyslem (orientací), jednak daným bodem. Je-li přímka b , jež prochází daným bodem A souběžná s přímkou a v daném smyslu, pak je b souběžná s přímkou a vzhledem ke kterémukoli svému bodu.
- (L05) **Souběžnost je relace symetrická a tranzitivní:** Je-li přímka b souběžná v daném smyslu s přímkou a , pak je také přímka a souběžná v témže smyslu s přímkou b . Dvě přímky souběžné s třetí přímkou v témže smyslu jsou také navzájem souběžné.
- (L06) Jestliže se bod pohybuje po jedné z obou různých souběžek ve smyslu souběžnosti, pak se jeho vzdálenost od druhé souběžky neomezeně zmenšuje. Jestliže se však pohybuje ve smyslu nesouhlasném se smyslem souběžnosti, potom tato vzdálenost neomezeně vzrůstá. Vzdáleností bodu A od přímky p rozumíme délku úsečky AB , kde B je průsečík přímky p s kolmicí na přímkou p vedenou bodem A .
- (L07) **Rozběžné přímky (rozběžky)** jsou takové přímky, které nemají společný bod. Asymptoticky se k sobě nepřibližují. Pro rozběžky a souběžky užíváme též společný název **rovnoběžky**. Bodem A , který neleží na dané přímce p lze vést k přímce p nekonečně mnoho rozběžek (přímka q na obrázku je



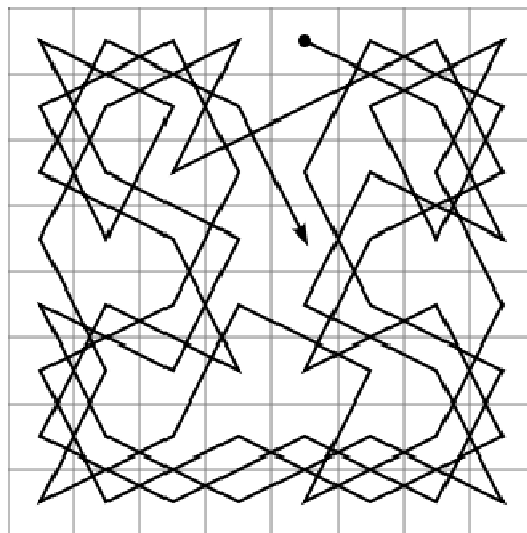
jednou z nich) a nekonečně mnoho různoběžek (tj. přímek, které protínají p – viz přímka r na obrázku). Rozběžky a různoběžky leží v doplňkových oblastech ohraničených přímkami m, n souběžnými s přímkou p .

Dějiny teorie grafů

Jako nejstarší úloha, jež souvisí s teorií grafů se uvádí **úloha o jezdcí**: Může jezdec projít šachovnicí (o 64 polích) tak, aby každým polem prošel právě jednou a posledním tahem se vrátil na výchozí pole?

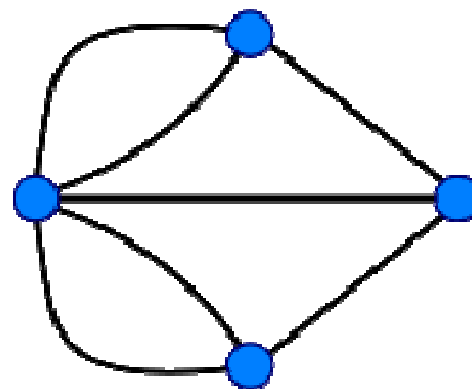
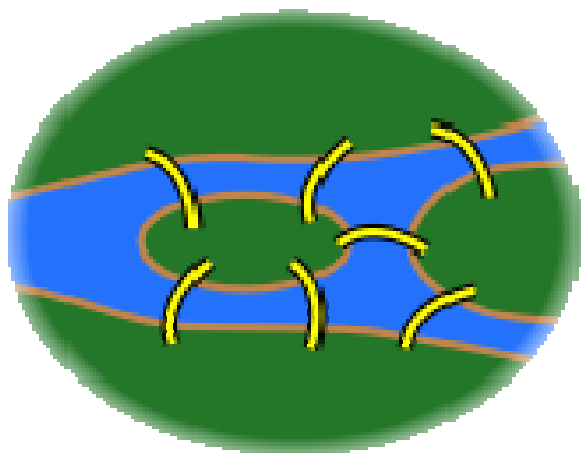
Jedno z prvních řešení podal počátkem 18. stol. Abraham de Moivre.

V dnešní terminologii teorie grafů hledáme kružnici, která obsahuje všechny uzly grafu – tzv. hamiltonovskou kružnici. Dodnes se neví, kolik hamiltonovských kružnic v tomto grafu existuje.



Další slavnou úlohou je **problém mostů města Königsbergu (Královce)**, který v roce 1736 vyřešil Leonhard Euler.

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis

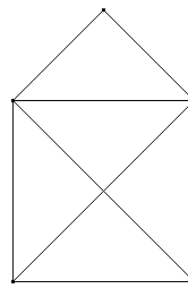


V Královci bylo umístěno 7 mostů podle obrázku. Problém zněl, zda někdo může vykonat procházku městem, při které projde přes všechny mosty, avšak přes každý právě jednou. Úloha je ekvivalentní s úkolem projít graf v pravé části obrázku, po každé hraně právě jednou a žádnou hranu nevynechat. Eulerovo řešení: Jestliže během cesty do některého uzlu po určité hraně vstoupíme musíme z něj po jiné hraně vystoupit. Odtud plyne, že uzly musí být sudého stupně (tzn. že počet hran, který jim přísluší, musí být sudý). Výjimkou z tohoto pravidla může být jen počáteční a koncový uzel. Cesta tedy může být realizovatelná buď

pro grafy, které mají všechny uzly sudého stupně (za předpokladu, že ji ukončíme v tom uzlu, ve kterém jsme začínali), nebo pro grafy, které mají právě dva uzly lichého stupně (pak je nutno z jednoho z těchto dvou uzlů vyjít a ve druhém z nich cestu skončit – příkladem takového grafu je „domeček“ na dalším obrázku).

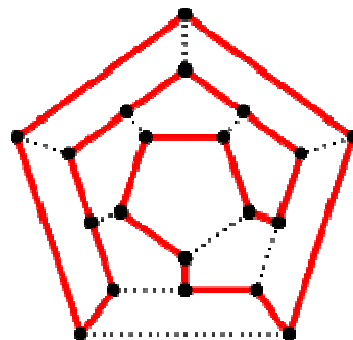
Po uvedení Eulerova výsledku se grafová problematika v matematice neobjevila více než sto let.

W. R. Hamilton vyšetřoval v 1. pol. 19. stol. otázky existence nekomutativních algeber. Pro jednu z nich našel model, jež představoval cesty v grafu pravidelného dvanáctistěnu. Na základě modelu vznikl hlavolam „Cesta kolem světa“, který se od r. 1859 prodával. Vrcholy dvanáctistěnu – kolíky – představovaly města a úkolem bylo natáhnout vlákno, aby šlo kolem všech kolíků a tvořilo kružnici (viz obr.).



V roce 1847 se G. Kirchhoff (1824-1887) zabýval výpočtem neznámých proudů v elektrických sítích. V souvislosti s řešením soustav lineárních algebraických rovnic, které při výpočtu obdržel, rozpracoval některé otázky z teorie stromů.

Tato problematika se pak rozvíjela zejména v souvislosti s praktickými úlohami z chemie. V roce 1857 se anglický matematik Arthur Cayley (1821-1825) zabýval otázkou kolik existuje izomerů uhlovodíku C_nH_{2n+2} . Znázornil si jednotlivé atomy jako kroužky v rovině a spojil čarou (hranou) ty kroužky (atomy), mezi nimiž je chemická vazba. Chemie tak začala využívat grafického znázornění chemických vzorců.



Otázkami stromů (jednotlivé isomery byly reprezentovány stromy) se dále zabývali v 2. pol. 19. stol. C. Jordan a J. J. Sylvester, od nějž pochází název graf v tom smyslu, jak jej chápeme dnes.

Nejnámější úlohou 19. století, kterou řešilo mnoho matematiků i nematematiců, je „problém čtyř barev“ vyřešený až v roce 1976 s využitím počítačů:

Jaký je nejmenší počet barev, který vždycky stačí na obarvení mapy v rovině, resp. na kulové ploše? Jedná se o takové mapy, kde každý stát představuje souvislou oblast. Od barvení požadujeme, aby každé dva různé státy měly různou barvu, pokud mají společnou hranici na nějakém úseku nenulové délky. Pokud mají pouze konečný počet společných bodů, mohou mít tutéž barvu. Od počátku existence tohoto problému se matematici snažili dokázat, že 4 barvy vždy postačí.

Úlohu (včetně hypotézy, že čtyři barvy stačí) vymyslel mladík Francis Guthrie, seznámil s ní svého bratra Fredericka, studenta na University College v Londýně. Ten otázku předal svému učiteli de Morganovi, který rovněž nenalezl řešení a napsal r. 1852 dopis Hamiltonovi. Hamilton sdělil, že se otázkou v nejbližší době zabývat nebude.

Zásluhou de Morgana se problém stal populární a zabývalo se jím mnoho lidí.

Po 28 letech, v r. 1879, publikoval důkaz problému 4 barev Alfred Bray Kempe, londýnský advokát. Ukázal, že se při důkazu stačí omezit na tzv. trivalentní mapy. Důkaz dále provedl mat. indukci a využil tzv. metodu Kempeho řetězců, která je v teorii grafů používána dodnes. Důkaz byl považován za správný až do r. 1890, kdy Percy John Heawood ukázal, že metoda v některých situacích selhává. Jeho práce však zůstala bez odezvy.

V roce 1896 upozornil na Kempeho chybu Carles de la Vallée Poussin (nezávisle na Heawoodovi). Na řešení problému se počalo intenzivně pracovat, zejména v Americe. Následky: rozvoj teorie grafů.

V sedmdesátých letech Kenneth Appel a Wolfgang Haken sestavili počítačový důkaz, který rozlišoval nejprve 1936, později 1405 různých situací. V roce 1976 důkaz provedli na počítači, představoval 1200 hodin strojového času. Důkaz byl veřejností definitivně přijat o 2 roky později.

První publikace z teorie grafů a příspěvek českých matematiků

První práci, která podává přehled nejstarších výsledků teorie grafů, nalezneme v *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, díl III*. Autoři Max Wilhelm Dehn (1878-1952) a P. Heegaard v části nazvané *Analysis Situs* seznamují čtenáře na několika stranách s problematikou cest v grafech, s vlastnostmi stromů, s rozkladem grafů, s problémem čtyř barev a s několika dalšími problémy.

První „grafovou“ práci v české matematické literatuře publikoval v roce 1926 Otakar Borůvka (1899-1995). Práce nazvaná *O jistém problému minimálním* se zabývala problémem nalezení minimální kostry grafu. Borůvka vytvořil první algoritmus nalezení minimální kostry. K řešení tohoto problému přivedly Borůvku praktické otázky ekonomické výstavby elektrovedných sítí. Krátce na to v roce 1930 stejný problém vyřešil zcela jiným způsobem Vojtěch Jarník (1897-1970) v práci, která měla stejný název jako práce O. Borůvky. Tyto dvě práce ovšem zůstávají v období před druhou světovou válkou jedinými příspěvky české matematiky k teorii grafů.

První monografií zcela věnovanou teorii grafů je kniha maďarského matematika Dénesa Königa (1884-1944) *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, která vyšla v Lipsku v roce 1936. Podruhé vyšla ve Spojených státech v roce 1950 a v roce 1986 v řadě TEUBNER-ARCHIV *zur Mathematik*, ve které vycházejí klasická matematická díla minulosti. König ve čtrnácti kapitolách své knihy soustředil prakticky všechny tehdejší znalosti této nové matematické disciplíny. Tato kniha sloužila po dlouhá léta jako jediná učebnice teorie grafů.

Další knihy věnované teorii grafů se objevují až na konci padesátých a v šedesátých letech. V této době dochází k bouřlivému rozvoji teorie grafů, který trvá prakticky až dodnes. Z nejznámějších knih jmenujme alespoň *Théorie des Graphes et ses Applications* francouzského matematika Clauda Berge (vyšla v roce 1958). V roce 1962 ji následovala kniha *Theory of Graphs* významného norského matematika Oysteina Oreho (1899-1968). V roce 1969 napsal svoji první knihu věnovanou teorii grafů (*Graph Theory*) americký matematik Frank Harary. V následujícím období se objevuje celá řada dalších publikací od různých autorů a přicházejí i první knihy věnované speciálním částem teorie grafů.

První knihou z teorie grafů u nás byla kniha Jiřího Sedláčka *Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů)* z roku 1964. Tato kniha potom vyšla jednou bulharsky a dvakrát německy. Pro druhé české vydání z roku 1977 ji autor značně rozšířil a přepracoval. V roce 1981 vyšla kniha potřetí.

I dnes, přes veškeré možnosti, které nám počítače nabízejí, existuje řada jednoduše formulovatelných úloh, pro něž dodnes nebyl nalezen „efektivní“ algoritmus pro jejich řešení.

Např. *problém obchodního cestujícího*. Jakkoli jednoduchý se zdá, jde o jeden z nejkomplicovanějších problémů diskrétní matematiky.

Obchodní cestující má projít danou množinou měst a vrátit se tam, odkud vyšel. Náklady na jeho cestu přitom mají být co nejmenší. Situaci lze popsat ohodnoceným grafem, v němž

vrcholy jsou jednotlivá města, hranou spojíme města, mezi nimiž existuje přímé dopravní spojení a každé hraně přiřadíme náklady spojené s cestováním mezi danými vrcholy.

V praxi se taková úloha obvykle řeší pouze přibližně (heuristickými algoritmy). Tím se (za cenu vzdání se nároku na nalezení přesného řešení) dosahuje prakticky použitelných časů.

Bourbakisté

V první polovině 20. století se ve Francii objevila skupina nadaných studentů matematiky, která nebyla spokojena se stavem vyučování matematice na univerzitách. Studenti se rozhodli, že dosavadní pojetí matematiky zmodernizují. Založili tajný spolek a od roku 1935 publikovali své práce pod jménem řeckého generála Nicholase Bourbakiho. Členové této skupiny jsou souhrnně označováni jako **Bourbakisté**. Záměrem Bourbakistů bylo vybudovat celou matematiku na základě teorie množin. Tím měla být matematika plně axiomatizována a postavena na pevný základ. Skupina dodnes působí na v Paříži pod oficiálním názvem *Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki*.

Více se dozvíte v nedávno vyšlé publikaci vydavatelství ACADEMIA

Amir D. Aczel: *Umělec a matematik*

Příběh o Nicolasi Bourbakim, geniálním matematikovi, který nikdy neexistoval

Z informací o knize:

Identita geniálního francouzského matematika Nicolase Bourbakiho, autora rozsáhlé řady monografií, které významně ovlivnily vývoj moderní matematiky a její výuky ve dvacátém století, byla vždy opředená závojem tajemství. Zasvěcení znali skutečnost, mnozí tušili nějakou čertovinu, ostatní dodnes věří tomu, že Bourbaki je člověk z masa a kostí. Z určitého pohledu měli pravdu všichni. Vždyť je tu jeho úctyhodné dílo, byl ctihodným členem jisté Akademie věd, zval přátele na svatbu své dcery... A lze tvrdit, že na světě dnes není matematik, kterého by Bourbakiho klíčové dílo neovlivnilo. Autor ve své knize vysvětluje nejen zábavnou stránku skutečné-neskutečné osobnosti, především se však snaží poutavou formou vysvětlit co, proč a jak Bourbaki vykonal v matematice, jak tím přispěl k rozmachu vědeckého směru strukturalismu a jeho metod a ovlivnil tak myšlení v mnoha oborech zejména ve druhé polovině dvacátého století. Čtenář se dozví mnoho zajímavého o předních francouzských matematicích, ale také o předních osobnostech lingvistiky, antropologie, psychologie a výtvarného umění dvacátého století a o tom, co tyto osobnosti a jejich na první pohled velmi vzdálené obory spojovalo.

Třetí krize matematiky

Rychlý rozvoj této matematické disciplíny vedl na přelomu 19. a 20.století k objevení paradoxů teorie množin, které způsobily zásadní krizi ve filosofii matematiky. Tato krize vedla k přísné formalizaci teorie množin (a tím i celé matematiky) — jejím výsledkem byl vznik axiomatických systémů, z nichž největší životnost v průběhu 20.století ukázaly dva dnes nejběžněji používané: Zermelo-Fraenkelova teorie množin a Gödel-Bernaysova teorie množin.

Příklady paradoxů

- 1. Russelův Paradox.** Holič na vsi holí všechny muže (z dané vsi), který se neholí sami, ale neholí muže kteří se holí sami. Kdo holí holiče.
- 2.** Problém s množinou všech množin
- 3. Richardův Paradox.** Číslo n je nejmenší přirozené číslo, které se nedá popsat (v českém jazyce) větou s méně než 200 písmeny.

Filozoficko matematické směry, které se snaží najít východisko z krize

Intuicionismus (Poincaré, Brouwer) – odmítá vše co je založeno na intuici, neexistuje aktuální nekonečno, důkazy musí být konstruktivní.

Logicismus (Russel, Whitehead) – matematika jako opatrně vybudovaná logika a související s teorií množin (různé kategorie množin).

Formalismus (Gilbert) – matematiku je třeba zformalizovat důkaz je posloupnost logických formulí.