

DSM1 Cv 5

Relační objekty

Binární relace R na množině X je libovolná podmnožina kartézského součinu $X \times X = X^2$ (tedy $R \subseteq X^2$).

Relační objekt na množině X je dvojice $O = \langle X, R \rangle$, kde $R \subseteq X^2$.

Počet všech relačních objektů na X je $2^{|X|^2}$.

Orientovaný graf – totéž jako relační objekt – grafické znázornění pomocí šipek a smyček.

Vlastnosti binárních relací:

Relace	Vlastnost
reflexivní	$\forall x \in X : [x, x] \in R$
	$\Delta_x \subseteq R$
	Graf obsahuje všechny smyčky.
	Matice sousednosti má v hlavní diagonále všude jedničky.
	Počet všech reflexivních relací na X je $2^{ X ^2 - X }$.
ireflexivní	$\forall x \in X : [x, x] \notin R$
	$\Delta_x \cap R = \emptyset$
	Graf neobsahuje žádné smyčky.
	Matice sousednosti má v hlavní diagonále samé nuly.
	Počet všech ireflexivních relací je $2^{ X ^2 - X }$.
symetrická	$\forall x, y \in X : [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$
	$R = R^{-1}$
	S nějakou šipkou obsahuje relace i šipku obrácenou.
	Matice sousednosti je symetrická podle hlavní diagonály.
	Počet všech symetrických relací na X je $2^{\frac{ X ^2 + X }{2}}$.

antisymetrická	$\forall x, y \in X : [x, y] \in R \wedge [y, x] \in R \Rightarrow x = y$
	$R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$
	V grafu dovoleny smyčky.
	V matici sousednosti mohou být na hlavní diagonále jedničky, jinak matice neobsahuje žádné symetrické prvky.
	Počet všech antisymetrických relací na X je $3^{\frac{ X ^2 - X }{2}} \cdot 2^{ X }$.
asymetrická	$\forall x, y \in X : [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \notin R$
	$R \cap R^{-1} = \emptyset$
	V grafu nepovoleny smyčky.
	V matici sousednosti na hlavní diagonále nuly, jinak je matice asymetrická.
	Počet všech asymetrických relací je $3^{\frac{ X ^2 - X }{2}}$.
tranzitivní	$\forall x, y, z \in X : [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R$
	$R \circ R \subseteq R$
	Musí obsahovat všechny složené šipky, které v ní mohou vzniknout.
	Test tranzitivity: R tranz. $\Leftrightarrow A_R \cdot^b A_R - A_R$ neobsahuje 1.
	Tranzitivní uzávěr R: $\overline{R}$ - nejmenší tranzitivní relace, obsahující R $A_{\overline{R}} = A_R + A_R \cdot^b A_R +^b A_R \cdot^b A_R \cdot^b +^b \dots$; matici násobíme booleovskysama se sebou dokud vznikají nové jedničky – nové šipky (ty k relaci přidáváme).
intranitivní	$\forall x, y, z \in X : [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \notin R$
	$(R \circ R) \cap R = \emptyset$
	Zakazuje složené šipky, včetně smyček.
	Test intranzitivity: R intranz. $\Leftrightarrow A_R \cdot^b A_R + A_R$ neobsahuje 2.

Příklady:

1. Množina Y má 5 prvků. Určete, kolik procent ze všech binárních relací na Y a) je reflexivních, b) není ani reflexivních ani ireflexivních, c) je symetrických, d) je asymetrických, e) není antisymetrických.
2. Počet všech symetrických relací na X je 1024. Určete počet prvků množiny X .
3. Počet všech asymetrických relací na X je 729. Určete počet prvků množiny X .
4. Na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ je dána relace $R = \{[1,1], [1,2], [1,3], [2,3], [2,4], [3,3], [4,2]\}$.
 - a) Nekreslete její graf a určete, zda je reflexivní, ireflexivní, symetrická, antisymetrická, asymetrická, tranzitivní, intranzitivní.
 - b) Kolik nejméně šipek je nutno přidat, aby byla symetrická?
 - c) Kolik nejméně šipek nutno ubrat, aby byla c1) antisymetrická, c2) asymetrická, c3) intranzitivní?
 - d) Sestavte tranzitivní uzávěr relace R .

5. Relace R je zadána pomocí matice sousednosti

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozhodněte o tranzitivnosti a intranzitivnosti relací R a R^{-1} .

6. Relace R je zadána pomocí matice sousednosti

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozhodněte o ireflexivnosti a antisymetrii relace R .

Orientovaný sled délky m v relaci R – posloupnost prvků $[p_0, p_1, \dots, p_m]$, kde pro $i = 1, 2, \dots, m$ platí $[p_{i-1}, p_i] \in R$.

Pokud $p_0 = p_m$ nazýváme sled uzavřený, jinak je sled otevřený.

V matici $A_R^m = A_R \cdot A_R \cdot \dots \cdot A_R$ (m – krát) udává prvek m_{ij} počet orientovaných sledů délky m v relaci R s počátečním prvkem x_i a koncovým prvkem x_j .

7. Je dána relace R na množině $\{E, F, G, H\}$:
 $R = \{[E, E], [E, F], [F, E], [F, F], [F, G], [G, F], [G, G], [H, E], [H, H]\}$

- Kolik orientovaných sledů délky 4 začíná v E a končí v G?
- Určete počet všech orientovaných sledů délky 4 začínajících v H.
- Kolik orientovaných sledů délky menší než 5 končí v F?
- Určete počet všech orientovaných sledů délky 4 v této relaci.

8. Binární relace R na množině X je zadána pomocí matice

$$\text{sousednosti } A_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Najděte všechny prvky}$$

$x \in X$, pro něž platí, že počet všech sledů délky 4, které v bodě x končí je menší než počet všech sledů délky 2, které v bodě x začínají.

9. Binární relace na množině X je zadána pomocí matice

$$\text{sousednosti } A_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Určete počet všech uzavřených}$$

sledů délky 4.