**ARNP 1 2015 Př. 10**

## Ekvivalence množin

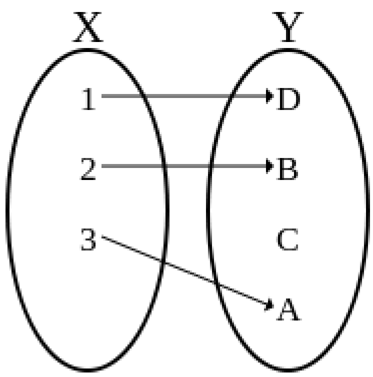
**Ekvivalentní zobrazení mezi množinami $X, Y$:**

Jedná se o **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny $X$ na množinu $Y$. Je to **prosté** zobrazení množiny $X$ **na** množinu $Y$.

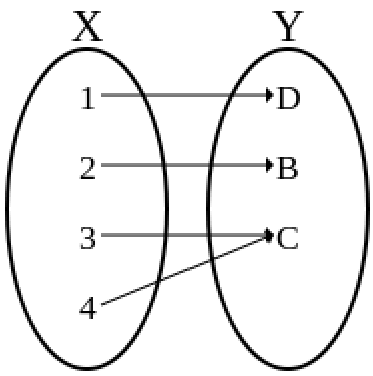
***Vysvětlení:***

*Obecně se jedná o zobrazení* ***z*** *množiny $X$* **do** *množiny $Y$ ($X \to Y$).* ***Zobrazení*** *je zvláštní případ binární relace (podmnožina kartézského součinu $X \times Y$), tedy množina uspořádaných dvojic $\left[x, y\right]$ ($x \in X, y \in Y$) takových, že* ***ke každému*** *$x$* ***existuje nejvýše jedno*** *$y$ (z každého prvku množiny $X$ smí vycházet jen jedna šipka). Prvky množiny $X$ nazýváme* **vzory***, prvky množiny $Y$ nazýváme* **obrazy***.*

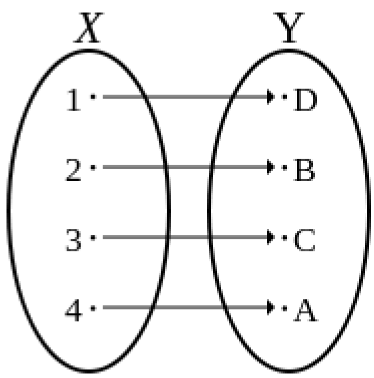
*Zobrazení nazýváme* ***prosté****, právě když k libovolným dvěma* ***různým*** *vzorům existují* ***různé*** *obrazy.*



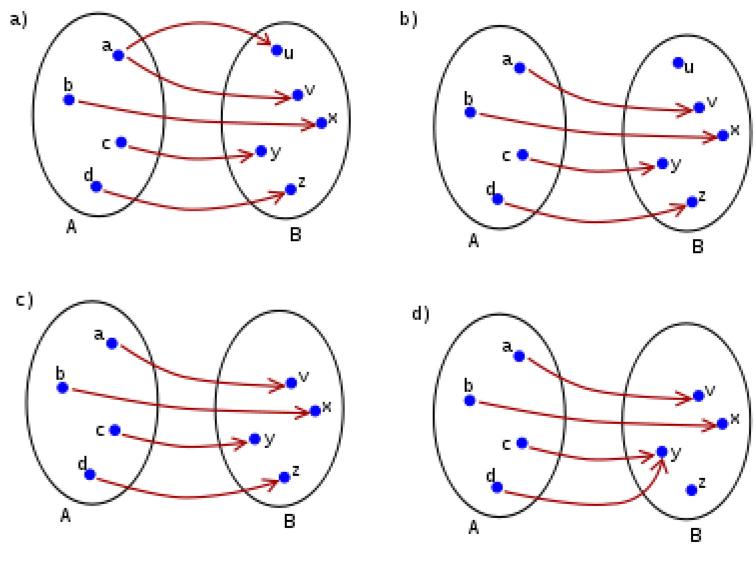

*Zobrazení nazýváme zobrazením* ***na množinu*** *$Y$, právě když každý prvek množiny $Y$ je* **obrazem** *nějakého prvku množiny $X$* ***(každý prvek množiny*** *$Y$* ***má aspoň jeden vzor).***




*Zobrazení, které je **prosté** a zároveň zobrazení **na množinu**, nazýváme **ekvivalentní zobrazení mezi množinami** $X$ **a** $Y$ (takové zobrazení také nazýváme **vzájemně jednoznačné zobrazení** množiny $X$ na množinu $Y$, případně* **bijekce***).*




**Příklad 1:** Rozhodněte, o jaké případy se jedná na následujícím obrázku:



**Zápis ekvivalentního zobrazení:**

Zapíšeme množinu všech uspořádaných dvojic prvků, které patří do příslušného ekvivalentního zobrazení. Například ekvivalentní zobrazení na obrázku před příkladem 1 zapíšeme takto

$$\{[1;D],[2;B][3;C],[4;A]\}.$$

## Jak můžeme množiny porovnávat podle jejich velikosti?

- **V případě konečných množin je to jednoduché**. Určíme počet jejich prvků a **ty, které mají stejný počet prvků**, považujeme za **„stejně veliké“.** Mají-li množiny stejný počet prvků, snadno určíme **ekvivalentní zobrazení** mezi nimi. Například mezi množinami $A=\{2;4;6;8;10\}$ a $B=\{a;b;c;d;e\}$, které mají stejný počet prvků 5, určíme ekvivalentní zobrazení $\{[2;a];[4;b];[6;c];[8;d];[10;e]\}$ (*Kolik je takových zobrazení? Určete ještě dvě ekvivalentní zobrazení mezi množinami* $A$ *a* $B$.) V případě množin $C=\{u;v;w\}$ a $D=\{1;2\}$, které mají různý počet prvků, ekvivalentní zobrazení neexistuje. Kdybychom například vytvořili uspořádané dvojice $[u;1]$ a $[v;2]$, pro prvek $w$ z množiny $C$ už „partner“ do uspořádané dvojice neexistuje. (*Zamyslete se nad situací mistra v tanečních, který má v kursu dívky a chlapce a nezná jejich počet. Nebude je počítat, ale vydá pokyn k vytvoření tanečních dvojic*.)

- **V případě nekonečných množin** je to složitější, jejich počet nemůžeme určit. Budeme proto **hledat ekvivalentní zobrazení mezi nimi**. Říkáme, že **nekonečné množiny, mezi kterými existuje ekvivalentní zobrazení**, mají **stejnou mohutnost. Nekonečné množiny**, které jsou **ekvivalentní s množinou přirozených čísel**, nazýváme **spočetné množiny.**
***Skutečnost, že nekonečná množina je ekvivalentní s množinou přirozených čísel (že je spočetná), si můžeme představit tak, že její prvky lze seřadit do řady a očíslovat.***

**Existují množiny, které nejsou spočetné.** Příkladem **množiny**, která **není spočetná**, je **množina všech reálných čísel** $R$ (vysvětlení na konci přednášky).

## Hledání ekvivalentního zobrazení:

- **Jedná-li se o konečné množiny**, je **podmínkou existence ekvivalentního zobrazení** mezi nimi to, že musí mít **stejný počet prvků *n*** (pak je počet takových ekvivalentních zobrazení roven číslu $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (čteme n – faktoriál)).

  **Mají-li konečné množiny různý počet prvků, ekvivalentní zobrazení mezi nimi neexistuje**.

- **Pokud se jedná o nekonečné spočetné množiny** (typu množin z následujících příkladů), existuje nekonečně mnoho ekvivalentních zobrazení mezi nimi. Jedno z nich najdeme tak, že u obou množin vyjádříme závislost hodnoty daného prvku množiny na čísle ***n***, které udává pořadí tohoto čísla v řadě prvků dané množiny.

  **Příklad 2:** Najděte ekvivalentní zobrazení mezi množinami $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$, $B = \{1, 8, 27, 64, 125, \cdots\}$.

  Vidíme, že v množině *A* jsou sudá čísla, tedy pro *n*-tý prvek v pořadí platí, že se rovná $2n$. To zapíšeme zápisem $A = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{N}$ v této kapitole znamená množinu všech přirozených čísel větších než nula). V množině *B* jsou třetí mocniny přirozených čísel, takže pro *n*-tý prvek v pořadí platí, že se rovná $n^3$. Toto zapíšeme $B = \{n^3; n \in \mathbb{N}\}$. Takže zvolíme ekvivalentní zobrazení, které 1. prvku množiny *A* přiřadí 1. prvek množiny *B*, 2. prvku množiny *A* 2. prvek množiny *B* atd. Obecně dostáváme ekvivalentní zobrazení

$\{[2;1],[4;8],[6;27],[8;64],[10;125],\cdots\}$ , což obecně zapíšeme zápisem $\{[2n;n^3];n\in\mathbb{N}\}$.

Ještě může být zadán úkol například určit v množině $B$ obraz čísla $16\in A$. V tomto případě nejprve určíme příslušné $n$ (má platit $2n=16\Rightarrow n=8$). Potom určíme hodnotu 8. prvku v množině $B$ ($8^3=512$). Takže obrazem čísla 16 z množiny $A$ je číslo 512 v množině $B$.

Pokud ale bychom chtěli určit obraz čísla 36 z množiny $B$ v množině $A$, nebudeme úspěšní, protože číslo 36 v množině $B$ vůbec neleží (36 není třetí mocninou žádného přirozeného čísla).

**Příklad 3:**

1. Najděte ekvivalentní zobrazení mezi množinami *A*, *B* (stačí jedno). Kolik takových zobrazení existuje?

   a) $A=\{1,4,5\},B=\{2,7,9\}$,

   b) $A=\{2,4,7,8,10\},B=\{1,3,5,7\}$,

   c) $A=\{3,6,9,12,15\},B=\{4,8,12,16,20\}$.

2. Najděte ekvivalentní zobrazení mezi množinami *A*, *B*. Najděte v množině *B* obraz čísla $x\in A$ . Najděte v množině *A* obraz čísla $y\in B$.

   a) $A=\{5,10,15,20,25,\cdots\},B=\{1,4,9,16,25,\cdots\}$, $x=55,y=81$

   b) $A=\{3,9,15,21,27,\cdots\},B=\{3,5,7,9,11,\cdots\}$, $x=35,y=54$

   c) $A=\{11,22,33,44,55,\cdots\},B=\{7,10,13,16,19,\cdots\}$,
   $x=77,y=36$

   d) $A=\{2,5,10,17,26,\cdots\},B=\{4,17,30,43,56,\cdots\}$,
   $x=50,y=72$.

**Návod:**

**Na příklad a)** použijeme metodu z příkladu 2.

**V příkladu b)** použijeme jiný postup. Všimneme si, že prvky množiny $A$ se liší o $6$, podobně jako násobky čísla 6. Jenomže první číslo v naší řadě není $6 \cdot 1 = 6$, ale 3, tedy $6-3$, stejně na druhém místě není $6 \cdot 2 = 12$, ale 9, tedy $12-3$ atd. Můžeme tedy vyslovit hypotézu, že $n$-té číslo v pořadí má tvar $6n-3$. Množinu $A$ tedy zapíšeme takto (můžeme to nazvat zápis pomocí $n$-tého členu): $A = \{6n-3; n \in \mathbb{N}\}$. Tento postup použijeme na všechny takové nekonečné množiny, jejichž sousední členy se liší o stejné číslo.
Pro množinu $B$ platí: její prvky se liší o 2, ale první prvek není 2, ale 3, tedy $2+1$, druhý prvek není 4, ale 5, tedy $4+1$. Obecně platí, že $n$-té číslo v pořadí má tvar $2n+1$. Množinu $B$ zapíšeme pomocí n-tého členu takto: $B = \{2n+1; n \in \mathbb{N}\}$.
Hledané ekvivalentní zobrazení zapíšeme takto: $\{[6n-3; 2n+1]; n \in \mathbb{N}\}$

***Vysvětlení:*** *Prvky našich množin tvoří takzvanou* ***posloupnost.*** *Posloupnost, jejíž* ***libovolné sousední členy se liší o konstantní číslo*** $d$ *(takzvanou diferenci), se nazývá* ***aritmetická posloupnost.*** *Pokud má* ***aritmetická posloupnost*** *první člen* $a_1$ *a diferenci* $d$*, má* ***n-tý člen*** $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

**V příkladu d)** Dejte pozor, posloupnost v množině $A$ není aritmetická posloupnost. Uvažujte souvislost prvků množiny $A$ s druhou mocninou jejich pořadí v posloupnosti.

## Množiny ekvivalentní s množinou přirozených čísel

**Motivační příklad:** Která množina obsahuje více prvků? Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ nebo množina všech sudých čísel $S$?

Zapíšeme množiny:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\}$, $S = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$.

Na první pohled se zdá, že sudých čísel musí být méně, „jsou přece vybrána ob jedno“ z množiny přirozených čísel. **Není to ale pravda**.

Hledejme ekvivalentní zobrazení mezi oběma množinami: Zapíšeme množiny pomocí *n*-tého členu:
$\mathbb{N} = \{n;\, n \in N\},\ \ S = \{2n;\, n \in \mathbb{N}\}$.
Ekvivalentní zobrazení zapíšeme takto: $\{[n; 2n];\, n \in \mathbb{N}\}$.
Připomeňme si, že o množinách, mezi kterými existuje ekvivalentní zobrazení, říkáme, že mají **stejnou mohutnost.** Množiny, které jsou ekvivalentní s množinou přirozených čísel, nazýváme **spočetné množiny** (viz také přednáška 5 – kardinální čísla).

**Příklad 4:** Ukažte, že množiny z příkladu 3, část 2 jsou spočetné (najděte ekvivalentní zobrazení mezi danými množinami a množinou přirozených čísel).

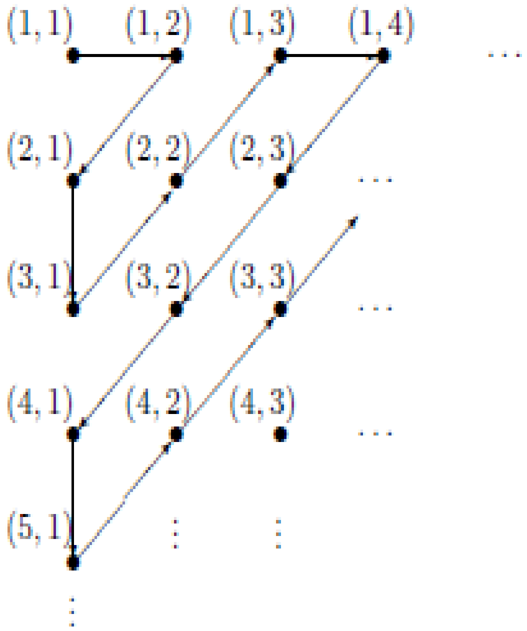
**Závěr: Nekonečné množiny**, které jsou **ekvivalentní s množinou přirozených čísel** (které můžeme „očíslovat“, které můžeme „sepsat do seznamu“) jsou **spočetné** (jsou „stejně velké“ jako množina přirozených čísel).

**Otázky na závěr (nepovinné):**

**Jsou všechny nekonečné množiny spočetné?**

Co například množina kladných racionálních čísel (čísel, která můžeme zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{N}$)? Vypadá to, že racionálních čísel je více než přirozených čísel (jen kolik racionálních čísel je mezi čísly 1 a 2). **To však není pravda. Množina racionálních čísel je spočetná.**

Dá se ukázat, že i mohutnost množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je stejná jako mohutnost množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$. Důkaz spočívá v tom, že všechny uspořádané dvojice přirozených čísel zobrazíme vzájemně jednoznačně na přirozená čísla, viz obr. 2.1.




## Existují množiny, které nejsou spočetné?

## Ano, takovou množinou je množina všech reálných čísel *R*.

**Důkaz – viz Wikipedie**

**Cantorova diagonální metoda** je matematický důkaz, pomocí kterého Georg Cantor ukázal, že množina všech reálných čísel je nespočetná.

# Důkaz

Cantorův důkaz ukazuje, že interval [0,1] není spočetný.

Důkaz sporem je veden takto:

1. Předpokládejme, že interval [0,1] je spočetně nekonečný.
2. Můžeme tedy „zapsat“ všechna čísla do posloupnosti ($r_1$, $r_2$, $r_3$, …)
3. Každé z těchto čísel lze zapsat v desetinném rozvoji.
4. Seřadíme tato čísla (nemusí být seřazena v přirozeném uspořádání). Předpokládejme například, že počátek našeho seznamu vypadá takto:

$r_1 = 0,5105110\ldots$
$r_2 = 0,4132043\ldots$
$r_3 = 0,8245026\ldots$
$r_4 = 0,2330126\ldots$
$r_5 = 0,4107246\ldots$
$r_6 = 0,9937838\ldots$
$r_7 = 0,0105135\ldots$
…

5. Sestrojíme reálné číslo $x$ ležící v intervalu [0,1] tak, že pro $k$-té číslo v jeho desetinném rozvoji vezmeme v úvahu $k$-té číslo v desetinném rozvoji $r_k$. Číslice, které bereme v úvahu, jsou v následující posloupnosti zvýrazněny (abychom ukázali, proč se důkaz nazývá *diagonální metoda*).

$r_1 = 0,\mathbf{5}105110\ldots$
$r_2 = 0,4\mathbf{1}32043\ldots$
$r_3 = 0,82\mathbf{4}5026\ldots$
$r_4 = 0,233\mathbf{0}126\ldots$
$r_5 = 0,4107\mathbf{2}46\ldots$
$r_6 = 0,99378\mathbf{3}8\ldots$
$r_7 = 0,010513\mathbf{5}\ldots$
…

6. Z těchto číslic definujeme číslice čísla $x$ následovně:
   - pokud je na $k$-tém místě v $r_k$ číslice 5 pak na $k$-tém místě v $x$ bude 4,
   - pokud není na $k$-tém místě v $r_k$ číslice 5 pak na $k$-tém místě v $x$ bude 5.
7. Číslo $x$ je zřejmě reálné (jelikož všechny desetinné rozvoje reprezentují reálné číslo) z intervalu [0,1]. Například pro posloupnost uvedenou výše by $x$ vypadalo takto:

   $x = 0,4555554\ldots$

8. Musí tedy existovat $r_n = x$ pro nějaké $n$, jelikož jsme předpokládali, že v posloupnosti $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$ jsou všechna reálná čísla z intervalu [0, 1].
9. Ale díky našemu způsobu sestrojování čísla $x$ se $x$ liší od každého $r_n$ na $n$-tém desetinném čísle, tedy $x$ neleží v posloupnosti $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$
10. Tato sekvence tedy není sekvencí všech reálných čísel z intervalu [0,1], docházíme ke sporu.
11. Odtud plyne, že předpoklad, že interval [0,1] je spočetný, musí být špatný.