

MATA Př 3

Číselné soustavy

Poziční číselná soustava je dnes převládající způsob písemné reprezentace čísel – dokonce pokud se dnes mluví o číselných soustavách, jsou tím obvykle myšleny soustavy poziční. V tomto způsobu zápisu čísel je hodnota každé číslice dána její pozicí v sekvenci symbolů. Každá číslice má touto pozicí dānu svou váhu pro výpočet celkové hodnoty čísla. Patrně nezbytným předpokladem pro vynalezení pozičních soustav je objevení symbolu pro nulu.

Desítková soustava (dekadická) – základ 10, číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Příklad vyjádření čísla v desítkové soustavě:

$$45\,092 = 4 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 2 \cdot 1.$$

Používáme zápis s mocninami čísla 10:

$$45\,092 = 4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Řád číslice v zápisu čísla:

- jednotky – nultý řád
- desítky – první řád
- stovky – druhý řád
- tisíce – třetí řád atd.

Příklady:

1. Odvoďte pomůcku pro výpočet druhé mocniny čísel, jejichž zápis v desítkové soustavě končí číslicí 5.
2. Od libovolného přirozeného čísla odečtěte součet jeho číslic. Jakým číslem je dělitelný výsledek?

Obecně: Rozvoj přirozeného čísla podle mocnin základu z :

Je-li dáno přirozené číslo $z > 1$, lze každé přirozené číslo x vyjádřit **právě jedním způsobem** ve tvaru:

$$x = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z^1 + a_0 z^0,$$

Číslo z nazýváme **základ soustavy**, čísla $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou menší než z a $a_n \neq 0$. Zapisujeme jej obvykle $(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$. Pokud $z = 10$ závorku a index vynecháváme. Symboly v závorce nazýváme číslice v soustavě o základu z .

Příklady pozičních soustav:

- desítková (používaná v běžném životě)
- dvojková – základ 2, číslice 0, 1
- pětiková – základ 5, číslice 0, 1, 2, 3, 4
- dvanáctková – základ 12, číslice ? 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11???

za číslice „10“ a „11“ musíme zvolit nové znaky – obvykle za „10“ zvolíme A, za „11“ volíme B.

- šestnáctková – základ 16, číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
- atd.

Dvě základní úlohy:

1. Převést číslo zapsané v desítkové soustavě do poziční soustavy o jiném základu.
2. Převést číslo zapsané v nedesítkové soustavě do soustavy desítkové.

Příklad 1:

Číslo 169 (zapsané v desítkové soustavě) převed'te do dvojkové soustavy.

Řešení:

Užijeme postupu opakovaného dělení číslem 2:

$$169 : 2 = 84, \text{ zbytek } 1$$

$$84 : 2 = 42, \text{ zbytek } 0$$

$$42 : 2 = 21, \text{ zbytek } 0$$

$$21 : 2 = 10, \text{ zbytek } 1$$

$$10 : 2 = 5, \text{ zbytek } 0$$

$$5 : 2 = 2, \text{ zbytek } 1$$

$$2 : 2 = 1, \text{ zbytek } 0$$

$$1 : 2 = 0, \text{ zbytek } 1$$

(Postup ukončíme, když vyjde jako výsledek dělení číslo 0)

Platí tedy: $169 = (10101001)_2$ (jako číslice píšeme zbytky počínaje posledním).

Příklad 2:

Číslo 3015 vyjádřete v soustavě o základu 7.

Řešení:

$$3015 : 7 = 430, \text{ zbytek } 5$$

$$430 : 7 = 61, \text{ zbytek } 3$$

$$61 : 7 = 8, \text{ zbytek } 5$$

$$8 : 7 = 1, \text{ zbytek } 1$$

$$1 : 7 = 0, \text{ zbytek } 1.$$

Platí: $3015 = (11535)_7$

Příklad 3:

Vyjádřete číslo 3747 v soustavě o základu 16.

Řešení:

$$3747 : 16 = 234, \text{ zbytek } 3$$

$$234 : 16 = 14, \text{ zbytek } 10 \text{ (A)}$$

$$14 : 16 = 0, \text{ zbytek } 14 \text{ (E)}$$

Platí $(EA3)_{16}$

Příklady:

3. Vyjádřete ve dvojkové soustavě čísla: 24, 35, 71, 297, 4357.

4. Vyjádřete v soustavě o základu 5 čísla: 67, 138, 654.

5. Vyjádřete v soustavě o základu 12 čísla: 201, 879.

Příklad 4:

Vyjádřete v desítkové soustavě číslo $(1101001)_2$.

Řešení:

$$(1101001)_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 8 + 1 = 105$$

Příklad 5:

Vyjádřete v desítkové soustavě číslo $(EB5)_{16}$.

Řešení:

$$(EB5)_{16} = 14 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 3584 + 176 + 5 = 3765$$

Příklady:

6. Vyjádřete v desítkové soustavě: $(1100111)_2$, $(4013)_5$, $(8A2)_{12}$.

Zápis desetinných čísel

- **Desítková soustava (základ 10):**

Například: $23,5407 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}$

Příklad:

7. Zapište rozvoje čísel v desítkové soustavě: 0,004873; 4589,10025

- **Dvojková soustava (základ 2):**

Například:

$$1101,10101 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5}$$

Převod desetinné části čísla z desítkové soustavy do dvojkové:

Vyjádřete číslo $(0,6789)_{10}$ ve dvojkové soustavě.

Postup (metoda násobení základem):

$$\begin{aligned} 0,6789 &= \frac{0,6789 \cdot 2}{2} = \frac{1,3578}{2} = 1 \cdot 2^{-1} + \frac{0,3578 \cdot 2}{2^2} = 1 \cdot 2^{-1} + \frac{0,7156}{2^2} = \\ &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + \frac{0,7156 \cdot 2}{2^2 \cdot 2} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + \frac{1,4312}{2^3} = \\ &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + \frac{0,4312 \cdot 2}{2^3 \cdot 2} = \\ &= 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + \frac{0,8624}{2^4} \end{aligned}$$

Platí: $(0,6789)_{10} = (0,1010...)_{2}$

Metoda násobení základem – postup aplikace:

1. Desetinnou část násobíme základem cílové soustavy.
2. Výsledek rozdělíme na celou a zlomkovou část, zlomkovou část použijeme v další aplikaci algoritmu.
3. Celá část získaného čísla je příslušnou číslicí požadovaného zápisu v jiné číselné soustavě.
4. Předchozí kroky se opakují, dokud není dosažen zbytek 0 nebo požadovaná přesnost výsledku.

Zápis čísla $(0,6789)_{10}=(x)_2$ tedy lze získat následovně:

$$0,6789 \cdot 2 = 1,3578 = 1 + 0,3578$$

$$0,3578 \cdot 2 = 0,7156 = 0 + 0,7156$$

$$0,7156 \cdot 2 = 1,4312 = 1 + 0,4312$$

$$0,4312 \cdot 2 = 0,8624 = 0 + 0,8624$$

$$0,8624 \cdot 2 = 1,7248 = 1 + 0,7248$$

Pak tedy $(0,6789)_{10}=(0,10101)_2$

Převod desetinného čísla z dvojkové soustavy do desítkové:

Například: 1101,10101

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = 8 + 4 + 0 \\ &+ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = 13 + \frac{16 + 4 + 1}{32} = 13 + \frac{21}{32} = 13,65625 \end{aligned}$$

Příklad:

8. Zapište ve dvojkové soustavě tato desetinná čísla: 5,2508; 3,14;
9. Zapište v desítkové soustavě čísla zapsaná ve dvojkové soustavě: $(110,11\ 00\ 11)_2$; $(1,11)_2$

Počítání v různých soustavách:

Desítková: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,**10**,11,12,...19,**20**,...99,**100**,...

Dvojková: 0,1,**10**,11,**100**,101,**110**,111,**1000**,...

Sedmičková: 0,1,2,3,4,5,6,**10**,11,12,13,14,15,16,**20**,...,66,**100**,...

Šestnáctková:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F,**10**,11,...1F,**20**,...FF,**100**,....

Sčítání a násobení ve dvojkové soustavě:

Základní spoje:

Sčítání: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 10$

Násobení: $0.0. = 0$, $1.0. = 0$, $0.1 = 0$, $1.1 = 1$ (malá násobilka)

Další součty:

$$1 + 1 + 1 = 10 + 1 = 11,$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 11 + 1 = 100$$

Příklady:

1. Sčítání:

11101011

+11001101

110111000

$$\begin{array}{r}
 111010101101 \\
 +101010011011 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11111111011 \\
 +11100110110 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10101010101011 \\
 +11111110001111 \\
 \hline
 \end{array}$$

2. Násobení:

$$\begin{array}{r}
 100101 \\
 \times \quad 1101 \\
 \hline
 100101 \\
 100101 \\
 100101 \\
 100101 \\
 \hline
 111100001
 \end{array}$$

Příklad:

$$\begin{array}{r}
 111011 \\
 \times \quad 111 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10101010 \\
 \times \quad 1110 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 11101101 \\
 \times \quad 101 \\
 \hline
 \end{array}$$

10. Sečtěte následující čísla:

$$(101)_2 + (110)_2, (21)_3 + (11)_3, (11011)_2 + (10101)_2, \\
 (21403)_5 + (13314)_5, (212)_3 + (102)_3, (214)_5 + (133)_5.$$

11. Vypočtěte rozdíly:

$$(110)_2 - (11)_2, (211)_3 - (12)_3, (34)_5 - (23)_5, (41)_5 - (33)_5 \\
 (1101)_2 - (1001)_2, (213)_4 - (132)_4, (234)_5 - (141)_5, \\
 (2101)_3 - (1210)_3$$